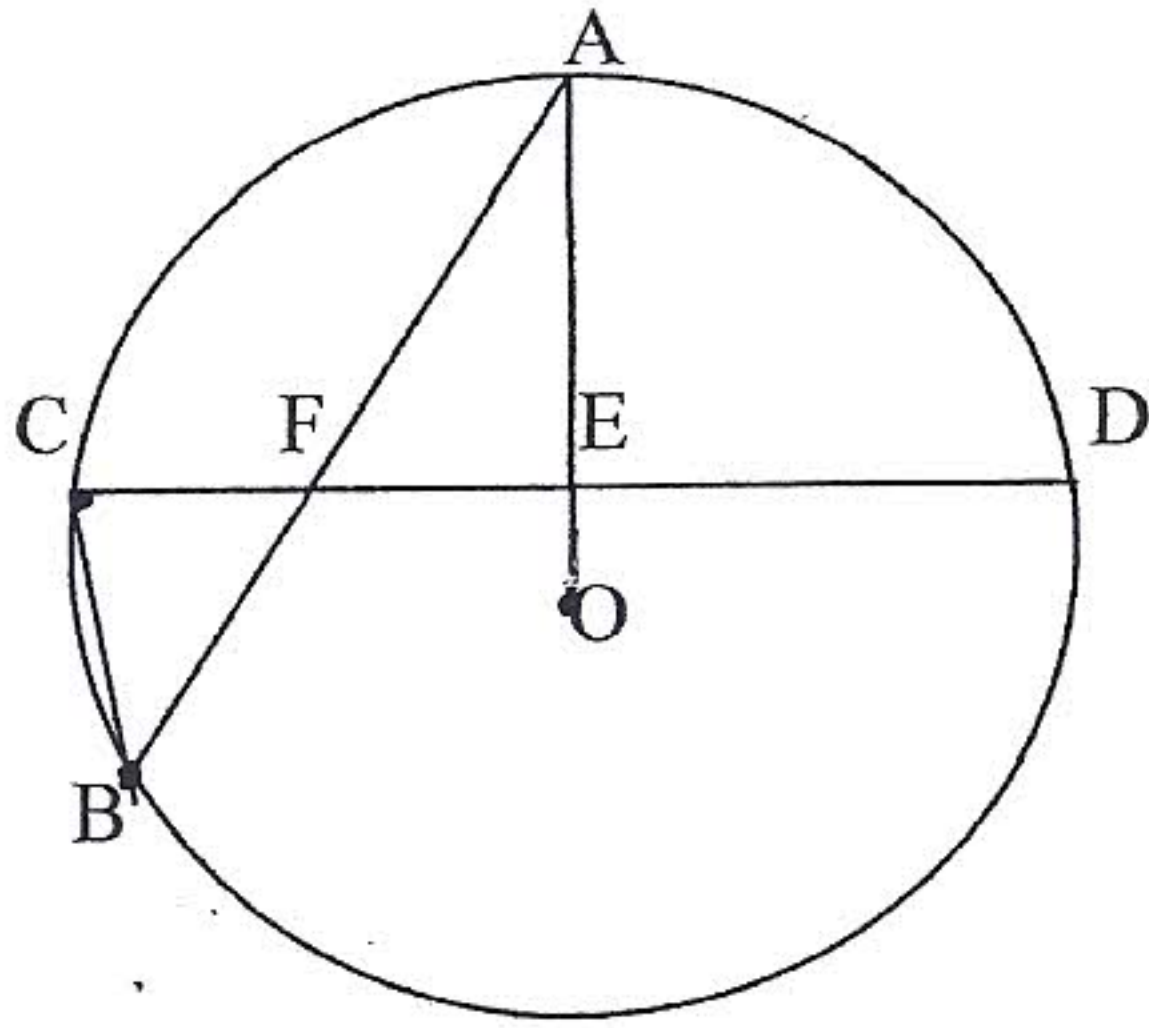


מבחן במתמטיקה לכתה י' 5 יח"ל (רבע ד')

(משך המבחן 120 דקות)



גאומטריה במישור

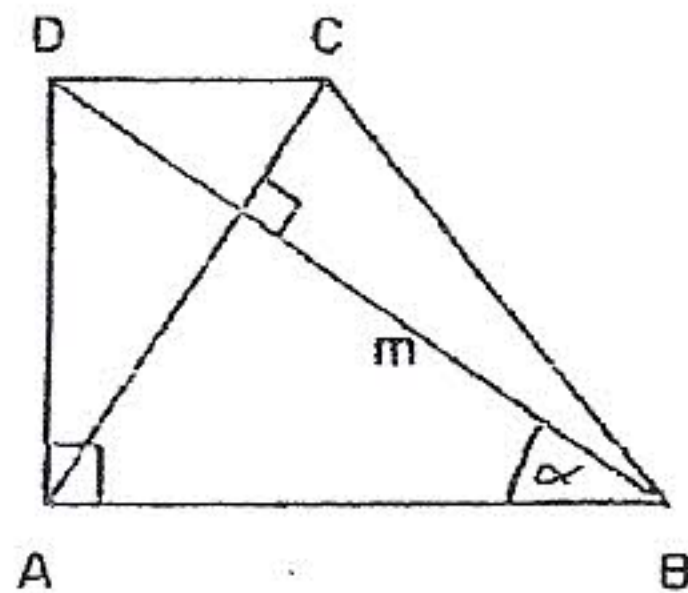
(1) במעגל שמרכזו O, שני מיתרים AB ו-CD נחתכים בנקודה F.

נתון E אמצע CD. AB ו-CE חוצים זה את זה.

(א) הוכח כי הנקודות D, O, B נמצאות על ישר אחד. 40%

(ב) נתון $OE = \frac{r}{3}$ (r - רדיוס המעגל). הוכח כי $BF^2 = 6(OE)^2$. 60%

טריגונומטריה

(2) בסרפז ישר-זווית ABCD האלכסונים מאונכים זה לזה $(AC \perp BD)$; $BD = m$; $\angle ABD = \alpha$ (ראה ציור).א. הבע את בסיסי סרפז זה באמצעות m ו- α . 40%ב. הוכח ששטח של הסרפז $S_{ABCD} = \frac{m^2}{2} \cdot \tan \alpha$. 20%ג. נתון: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$. 40%חשב ללא במחשבון: (1) $\sin \alpha$, (2) $\cos \alpha$, (3) $\sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ)$

(אין קשר בין הסעיפים א' ב' ו- ג')

חדו"א

(3) הישרים $y = -4x$ (העובר דרך הראשית (0,0)) ו- $y = -2x - 2$ (העובר דרך נקודה (1, -4))משיקים לגרף הפונקציה $y = x(x-2)(ax+b)$ בנקודות דרכן הם עוברים (הנקודות הנתונות)

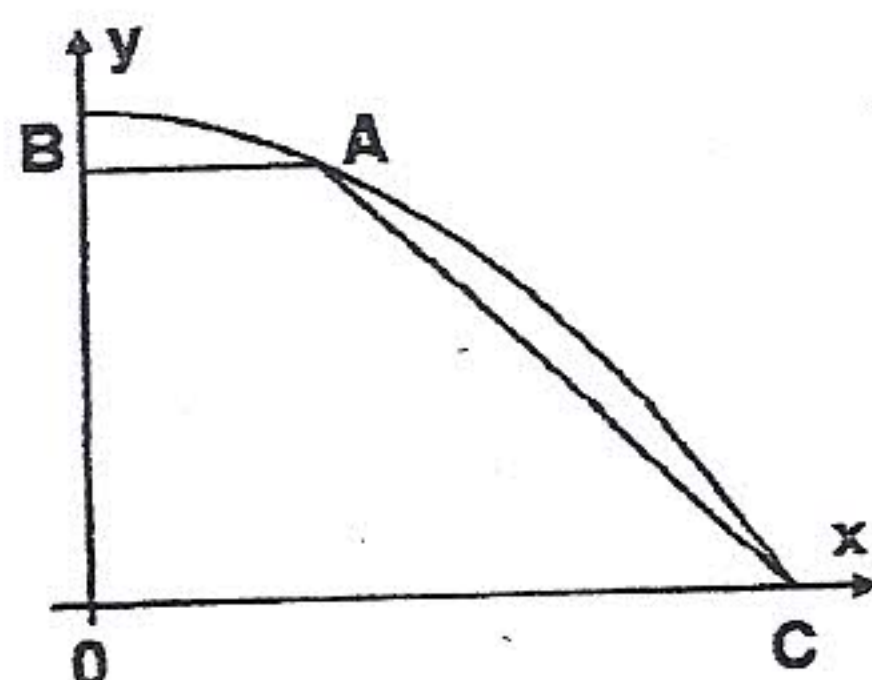
(א) מצא את a ו-b ורשום את הפונקציה. 20%

(ב) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים ואת נקודת הפיתול. 20%

(ג) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. 20%

(ד) המשיק $y = -2x - 2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה נוספת על ציר ה-x. 40%

חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק וגרף הפונקציה



(4) נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה

 $y = -x^2 + 81$ ברביע הראשון. AB מקביל

לציר ה-x. מצא מה צריכים להיות שיעורי

הנקודה A, כדי ששטח הסרפז ישר-הזווית

ABOC יהיה מכסימלי. 50%

(5) דרך הנקודה A שמצאת בסעיף א' מעברים משיק לגרף הפונקציה $y = -x^2 + 81$. מצא שטח המוגבל ע"י המשיק, הגרף וציר ה-x. 50%

בהצלחה!

ציון: _____

שם המורה/הבודק: _____

תאריך: _____

דף מבחן

5.04.11

מבחן לכיתה 1 כיתה (יגן 3)

שם המורה/הבודק:

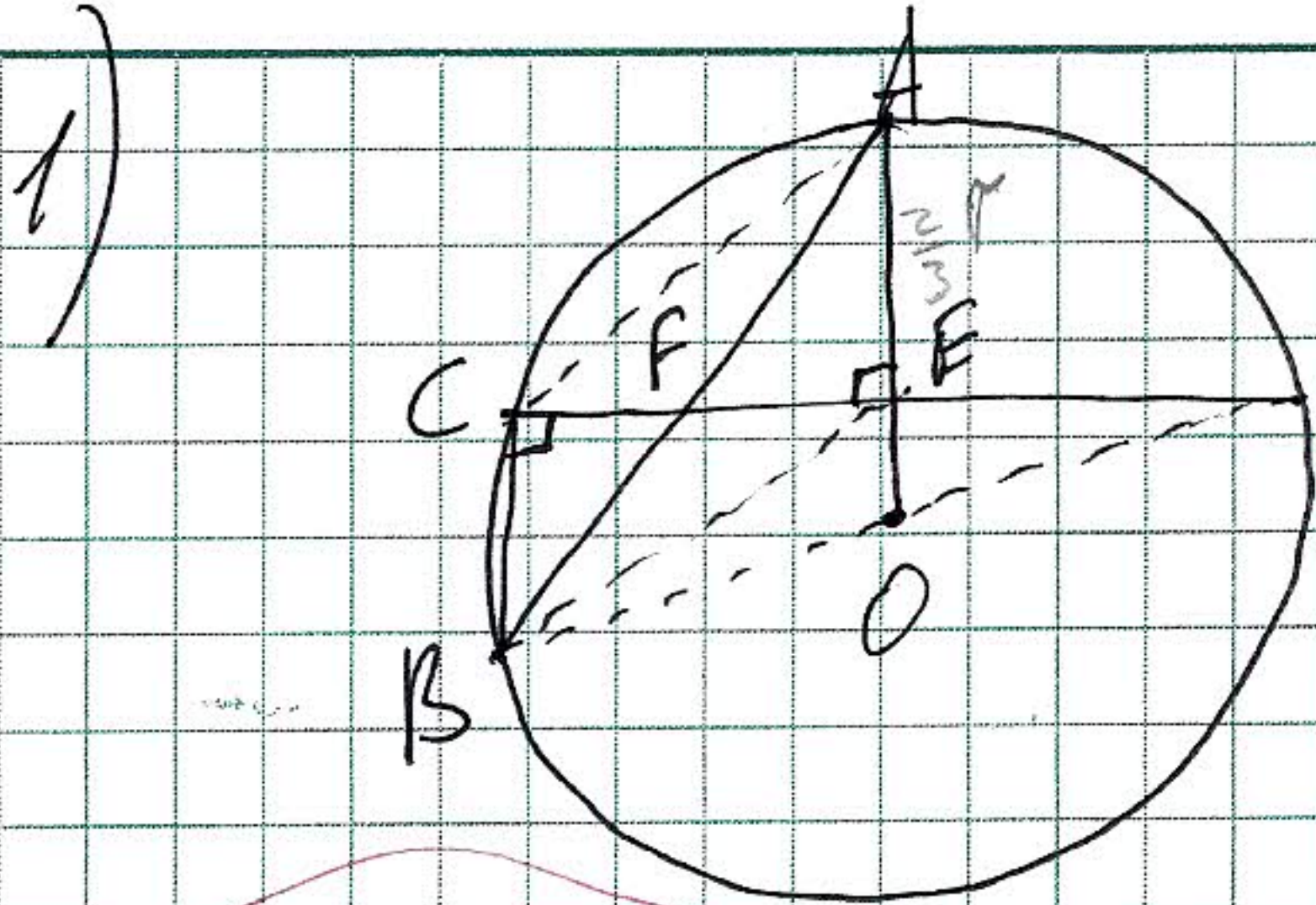
תאריך:

מקצוע:

הכיתה:

הנבחן:

שם משפחה ופרטי



מכאן
 $CE = ED$
 $CF = FE$
 $AF = BF$

הוכח:

בנקודה B, O, D
 (כדור = 180°)
 (כדור = 180°)

מכאן
 $OE = \frac{r}{3}$
 $BF^2 = 6(OE)^2$

הוכח:
 BE, AC

(1) $AEBC$ - מקבילים
 (אם כוונתך חזק)

(2) $CD \perp OA$
 (הוכח)

(3) $CB \parallel AE$

(4) $CD \perp CB$

(5) $\angle BCD = 90^\circ$
 (4+6)

(6) B, O, D הם נקודה אחת
 (5+6)

אם נתון כי $AE = 2x$ ו- $OE = x$ ו- $AF = 3x$

(8) $ED^2 = 9x^2 - x^2 = 8x^2 \Rightarrow ED = x\sqrt{8}$

(9) $ED = CE = 2EF \Rightarrow EF = \frac{1}{2}x\sqrt{8}$

(10) $AF^2 = AE^2 + EF^2$

(11) $AF^2 = 4x^2 + \frac{8x^2}{4} = 6x^2 \Rightarrow AF = \sqrt{6}x$

$BF^2 = 6x^2 = 6(OE)^2$

הוכח:

ב $\triangle OED$ $\sin \alpha = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{3}$

$\angle AOD = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ABO = \frac{90^\circ - \alpha}{2}$

$\angle FAE = \frac{90^\circ - \alpha}{2} \Rightarrow \triangle AEF$ $\frac{AE}{AF} = \cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$ $AE = 2x$

$AF = \frac{2x}{\cos(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = 2.4494897 \dots x \Rightarrow AF^2 = BF^2 = 6x^2$

$\alpha = 19.47122^\circ$

הוכח

דף מבחן

ציון:

שם המורה/הבודק:

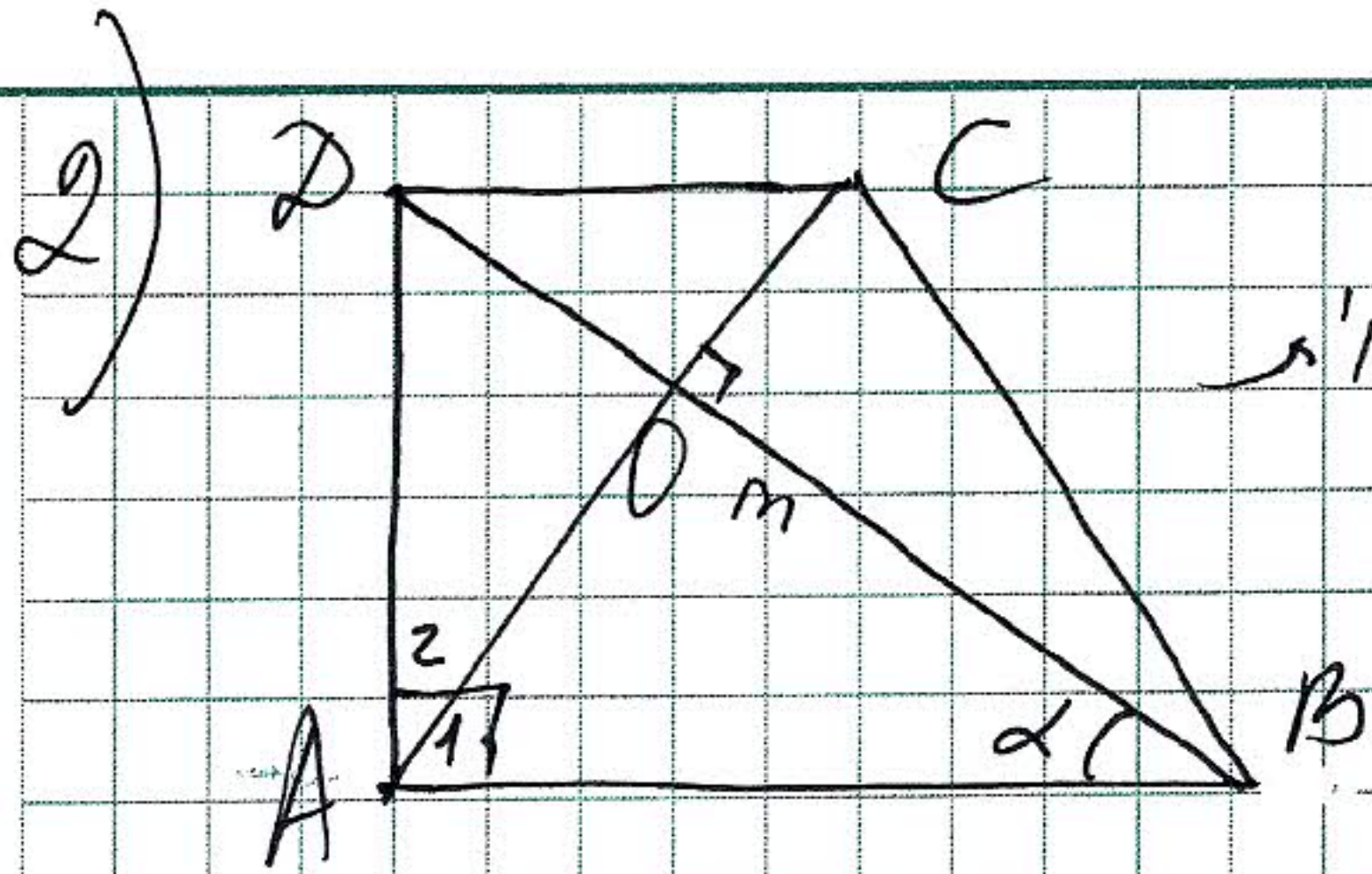
תאריך:

מקצוע:

הכיתה:

הנבחן:

שם משפחה ופרטי



נתון:
 $ABCD$ מלבן
 $\angle A = \angle D = 90^\circ$
 $AC \perp DE$
 $BD = m$
 $\angle ABD = \alpha$

נתון: (1)
 $\triangle ADB: \frac{AB}{m} = \cos \alpha$
 $AB = m \cos \alpha$

$\frac{AD}{m} = \sin \alpha$
 $AD = m \sin \alpha$

נתון: (2)
 $\triangle AOB \Rightarrow \angle A = 90^\circ - \alpha$

$\angle A_2 = \alpha$
 $\triangle ADC: \frac{DC}{AD} = \tan \alpha$
 $DC = AD \tan \alpha = m \sin \alpha \tan \alpha$

נתון: (3)
 $S_{ABCD} = \frac{m^2}{2} \tan \alpha$

$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot AD}{2} = \frac{(m \cos \alpha + m \sin \alpha \tan \alpha) m \sin \alpha}{2}$
 $= \frac{m^2}{2} \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) \cdot \sin \alpha = \frac{m^2}{2} \cdot \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}$

לכן $S_{ABCD} = \frac{m^2}{2} \cdot \tan \alpha$
 $\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$

נתון: (4)
 $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$
 $\Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

1) $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

2) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25}$

3) $\sqrt{2} \sin(\alpha + 45^\circ) = \sqrt{2} (\sin \alpha \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos \alpha) =$
 $= \sqrt{2} \left(\frac{24}{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{25} \right) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \left(\frac{24 + 7}{25} \right) = \frac{31}{25}$

9

ציון:

שם המורה/הבודק:

הנבחר:

הכיתה:

מקצוע:

תאריך:

שם משפחה ופרטי

3) $y = x(x-2)(ax+b)$ p'q'en $y = -2x - 2$ $y = -4x$
 $(1, -4)$ $(0, 0)$
 $y = ax^3 - 2bx - 2ax^2 + bx^2$ ✓ 1c

$$y = ax^3 - 2bx - 2ax^2 + bx^2 \quad \checkmark$$

$$y' = 3ax^2 - 4ax + 2bx - 2b \quad \checkmark$$

$$y = x(x-2)(2x+2)$$

$$y'(0) = -4 \checkmark$$

$$-2b = -4 \checkmark \Rightarrow \underline{b = 2}$$

$$y'(1) = -2 \quad \checkmark$$

$$3a - 4a + \cancel{2b} - \cancel{2b} = -2$$

$$\underline{\underline{a = 2}}$$

קצ' 13/1 חתום וקרא קצ' 30/1 ב)

$$x=0 \quad y=0$$

$$y=0 \quad \checkmark x=2, x=-1 \checkmark$$

$$y = 2x^3 + 2x^2 - 4x^2 - 4x = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

$$y' = 6x^2 - 4x - 4 \Rightarrow y'' = 12x - 4 = 0$$

$\frac{1}{3}$ ✓ $x = \frac{1}{3}$ ✓
 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{40}{27} \right)$

-1.48.-.

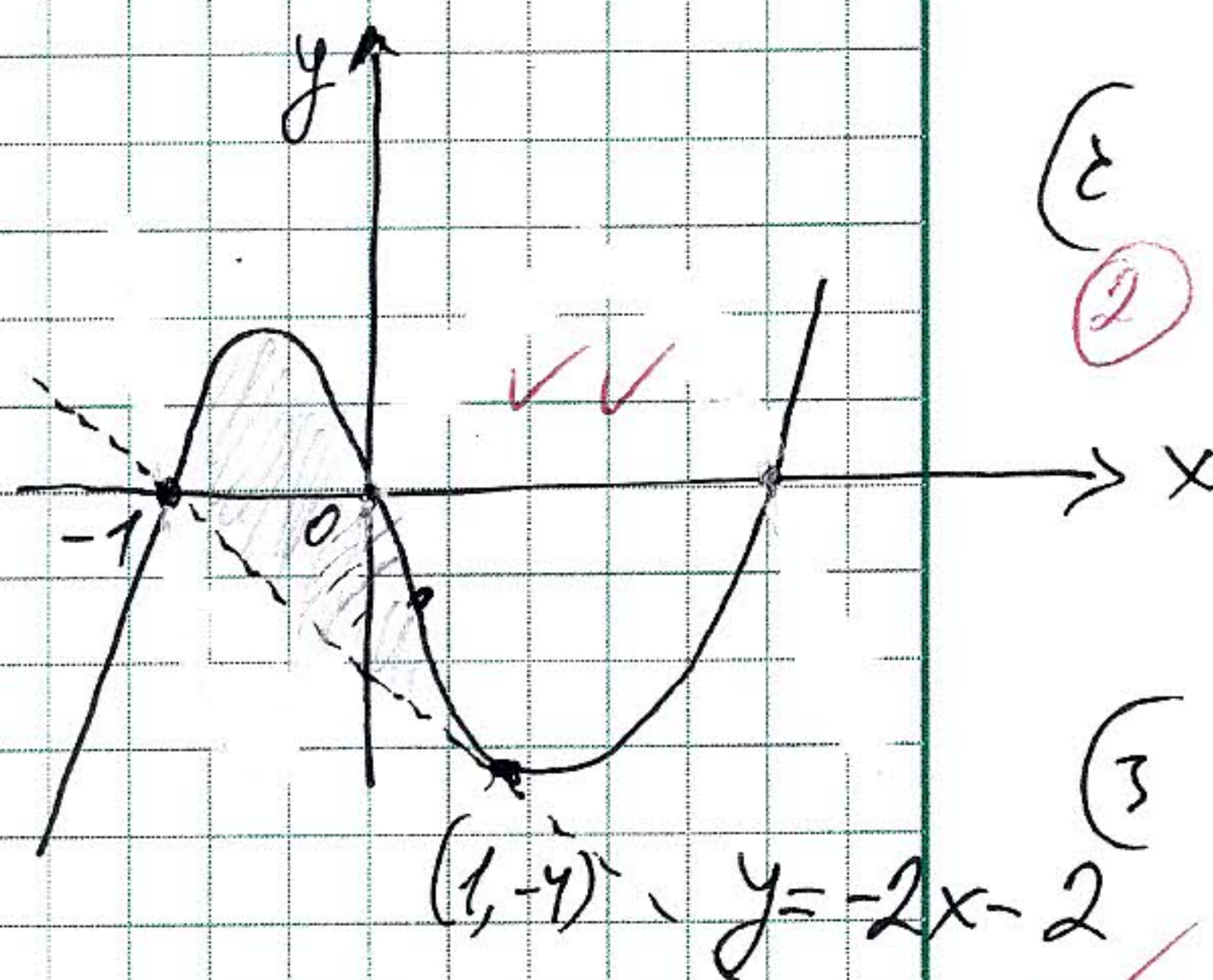
מכיוון שיש לנו עקבות $\lambda_1 = 1$ ו- $\lambda_2 = -1$
 נבדוק את הערכים $x = 1$ ו- $x = -1$
 עבור $x = 1$: $-2(1) - 2 = -4 \neq 0$
 עבור $x = -1$: $-2(-1) - 2 = 0$
 לכן $x = -1$ הוא הפתרון.
 נמצא את y עבור $x = -1$:
 $y = 1 - x = 1 - (-1) = 2$
 לכן הפתרון הוא $(-1, 2)$.

$$-2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad (-1, 0)$$

$$S' = \int_{-1}^1 (2x^3 - 2x^2 - 4x - (-2x - 2)) dx = \int_{-1}^1 (2x^3 - 2x^2 - 2x + 2) dx$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x \right] = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 1 + 2 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1 - 2 \right) = 2\frac{2}{3}$$

$$S = 2\frac{2}{3} \text{ m} \quad \checkmark$$

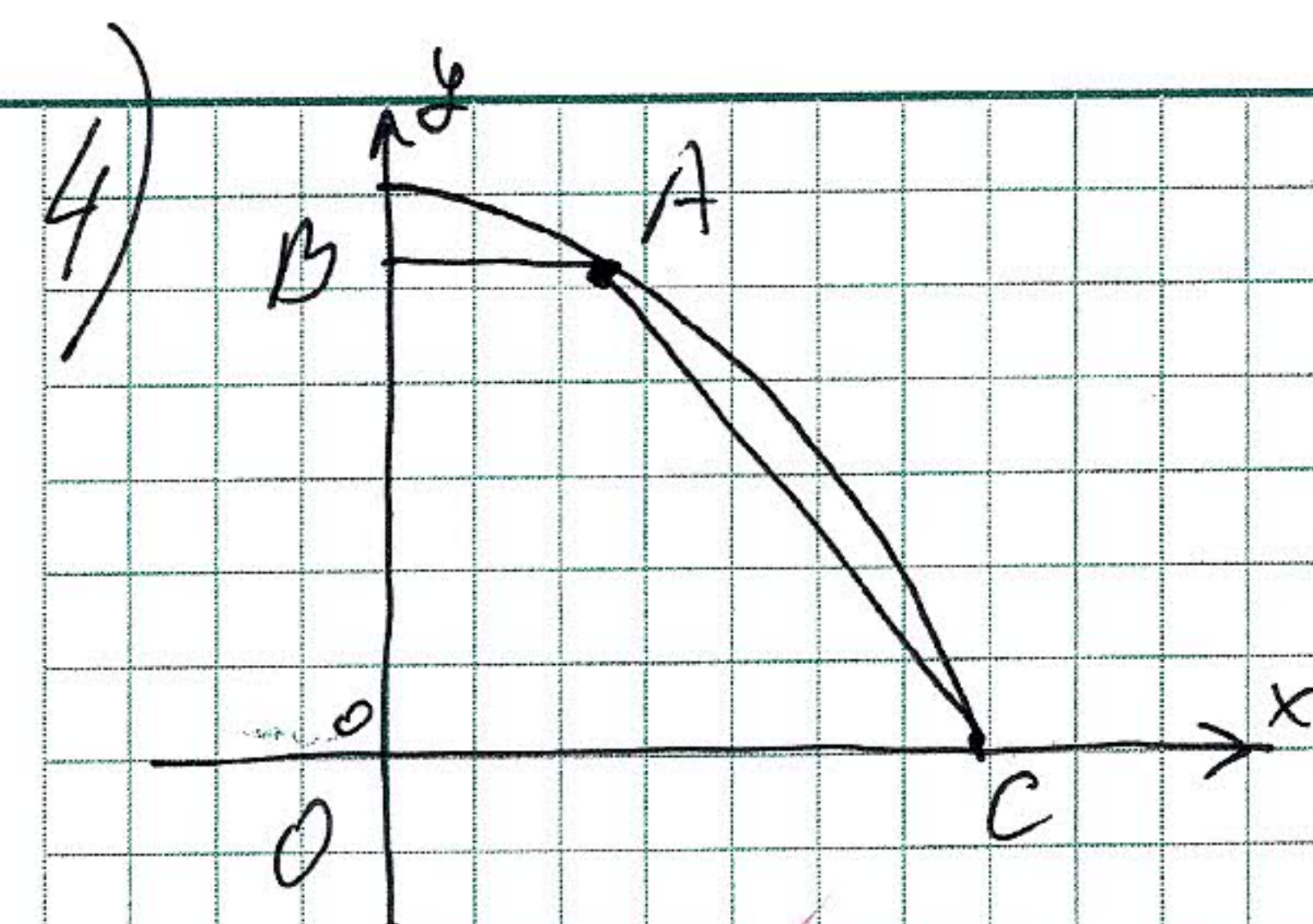


ציון: _____

שם המורה/הבודק: _____

הנבחן: _____ הכיתה: _____ מקצוע: _____ תאריך: _____

שם משפחה ופרטי



$$y = -x^2 + 81 \quad AB \parallel Ox$$

$$S_{ABOC} = \max \text{ כעס } A \text{ כעס}$$

$$S_{ABOC} = \frac{(AB + OC) \cdot OB}{2}$$

$$-x^2 + 81 = 0 \Rightarrow x_c = 9 \quad \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$x_A = t \Rightarrow AB = t, y_A = OB = -t^2 + 81$$

$$S(t) = \frac{(t+9)(-t^2+81)}{2}$$

$$S'(t) = \frac{1}{2}(-t^3 + 81t - 9t^2 + 729) \Rightarrow S'(t) = \frac{1}{2}(-3t^2 - 18t + 81) = 0$$

$$t^2 + 6t - 27 = 0$$

$$t_1 = -9 \quad t_2 = 3$$

$$\max = S(3) \quad t=3 \text{ כעס}$$

13

$$A(3, 72)$$

$$y' = -2x \Rightarrow m = y'(3) = -6$$

$$y - 72 = -6(x - 3)$$

$$y = -6x + 90$$

$$D: -6x + 90 = 0 \quad x = 15$$

$$S_{ACD} = S_{AED} - S_{AEC}$$

$$S_{AED} = \frac{72 \cdot (15-3)}{2} = 432$$

$$S_{AEC} = \int_3^9 (-x^2 + 81) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 81x \right]_3^9 = (-243 + 729) - (-9 + 243) = 252$$

$$S_{ACD} = 432 - 252 = 180$$

13