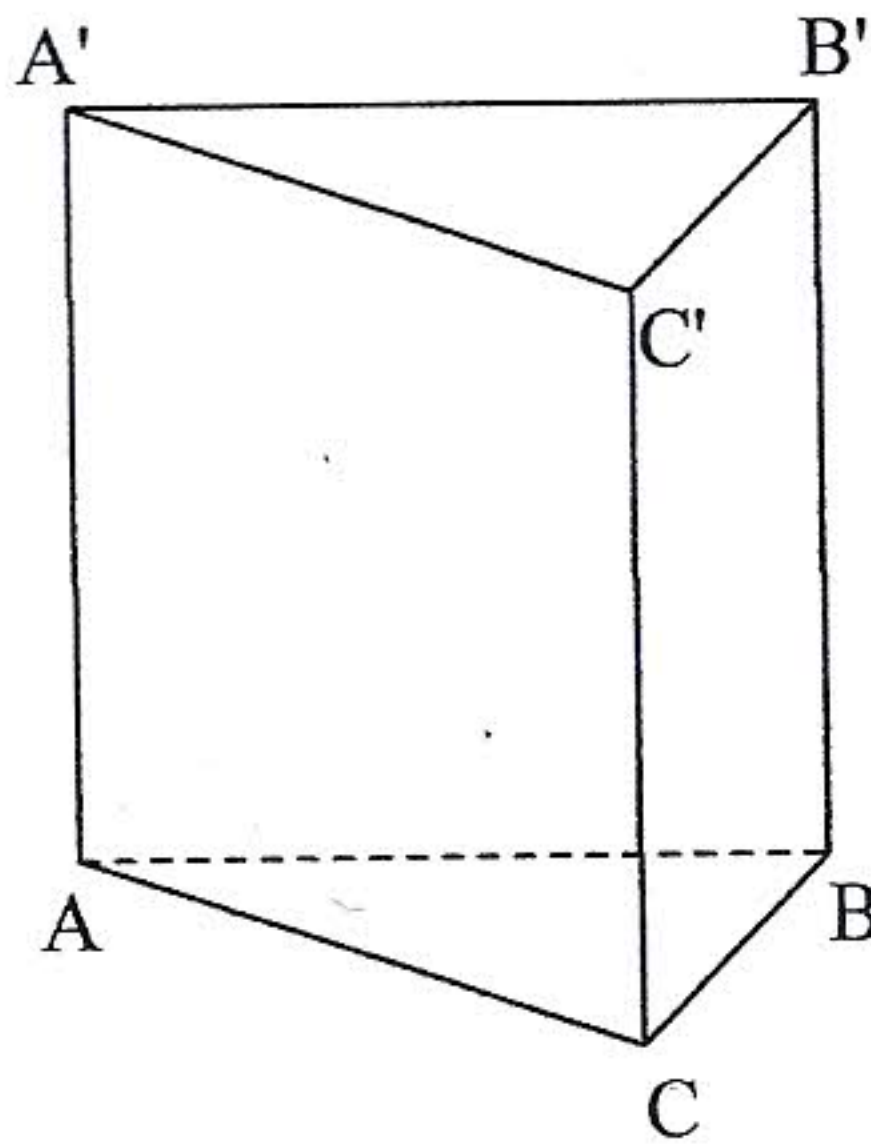


מבחן מתכונת במתמטיקה 5 יח"ל - 807 לכתה יב'
 במבחן ישנם שני פרקים א' ו ב' אליך לענות רק על שתי שאלות
 מפרק א' ורק על שאלה אחד מפרק ב'. לכל שאלה 33 1/3 נקודות.
 זמן הבחינה - שעהיים.

פרק א - גיאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים (66 2/3 נקודות)

(1)



נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABC A' B' C'$ שבסיסה משולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$).

נתון $A(1, 2, 5)$ ו- $C(4, 5, 1)$.

א. ההצגה הפרמטרית של מישור ABC : $\underline{x} = (1, 2, 5) + t(3, 3, -4) + s(2, -6, -3)$.

מצא משוואה אלגברית של המישור והצגה פרמטרית של ישר BC .

ב. נתון כי קודקוד B מונח על הישר $\underline{x} = (5, 14, 0) + t(3, 3, -4)$. מצא את קודקוד B .

ג. טנגנס הזווית בין אלכסון AC' לפאה $BCC'B'$ הוא $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

מצא את משוואת המישור $A'B'C'$.

ד. חשב נפח של פירמידה $C'ABC$.

(2 א)

באליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ חוסמים משולש ABC , באופן שהצלע AB מתלכדת עם הציר

הגדול של האליפסה, והקודקוד C הוא נקודה כלשהי על היקף האליפסה.

דרך A מעבירים ישר המאונך ל- AC , ודרך B מעבירים ישר המאונך ל- BC .

D היא נקודת החיתוך של שני אנכים אלה.

מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות D שהוגדרו באופן זה.
 פשט את הביטוי שהתקבל וקבע את הסוג של המקום הגאומטרי.

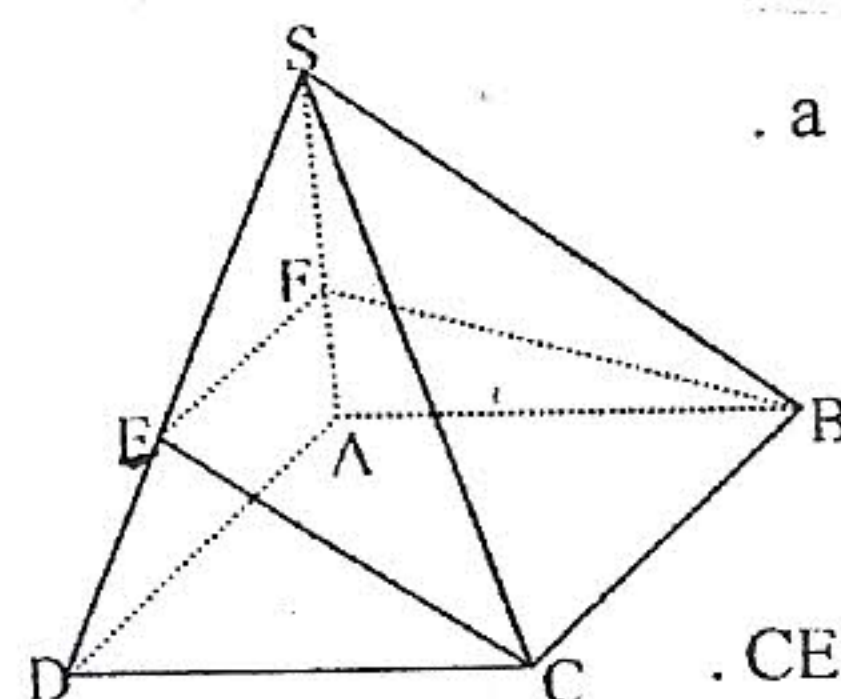
(ב)

(1) פתור את המשוואה: $\bar{z}^3 = z$ (מצא את כל הפתרונות).

(2) הראה שאם a ($a \neq 0$) הוא פתרון של המשוואה, אז $a^4 = 1$.

אין קשר בין הסעיפים א' ו-ב'.

(3)



$SABCD$ היא פירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, שצלעו a .

אורך כל מקצוע צדדי הוא $1.5a$.

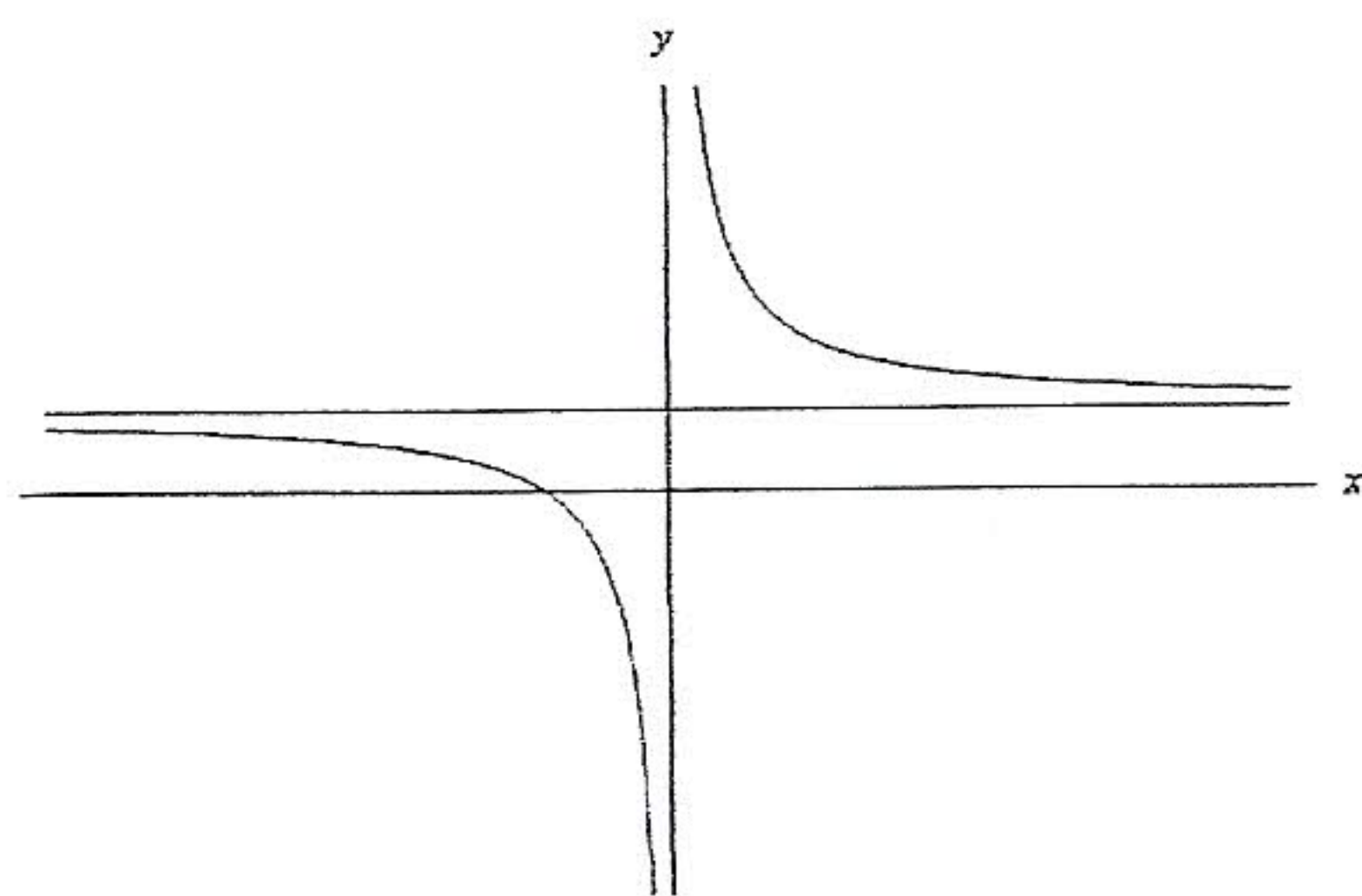
E מחלקת את המקצוע SD כך ש- $SE : ED = 2 : 1$.

F מחלקת את המקצוע SA כך ש- $SF : FA = 2 : 1$.

חשב את הזווית בין מישור הבסיס $ABCD$ למישור $CEFB$.

המשך בעמוד הבא

ענה על אחת מהשאלות 4-5. (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).



4. בסרטוט נתון גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{mx + n}{x}$.

- א. לפי הגרף, באיזה תחום ערכים יכול הפרמטר m להימצא? נמק. (הנח כי הקו האופקי המקווקו הוא אסימפטוטה אופקית של $f(x)$).
- ב. באיזה תחום ערכים יכול הפרמטר n להימצא? נמק.
- ג. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ שעל הפונקציה הוא $y = -4x + 10$. מצא את m ואת n .
- ד. הוכח כי השטח הסגור על ידי הפונקציה, ציר ה- x , הישר $x = 1$ והישר $x = 2$ הוא $S = 2 + \ln 16$.
- ה. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, האסימפטוטה האופקית והישר $x = 5$.
- ו. נתונה הפונקציה $g(x) = 16 \ln x + 4x - \frac{16}{x}$. הוכח כי $g'(x) = f^2(x)$.
- (2) השטח מסעיף ה' מסתובב סביב ציר ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב המתקבל.

5.

נתונה הפונקציה $y = \frac{8e^{4x}}{1-e^{4x}}$

- א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב) מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ג) מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- ד) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x , הישר $x = -2$ והישר $x = -1$.

בהצלחה!



התיכון המקיף עומר

דף מבחן

30/3/11

שם המורה/הבודק: (804)

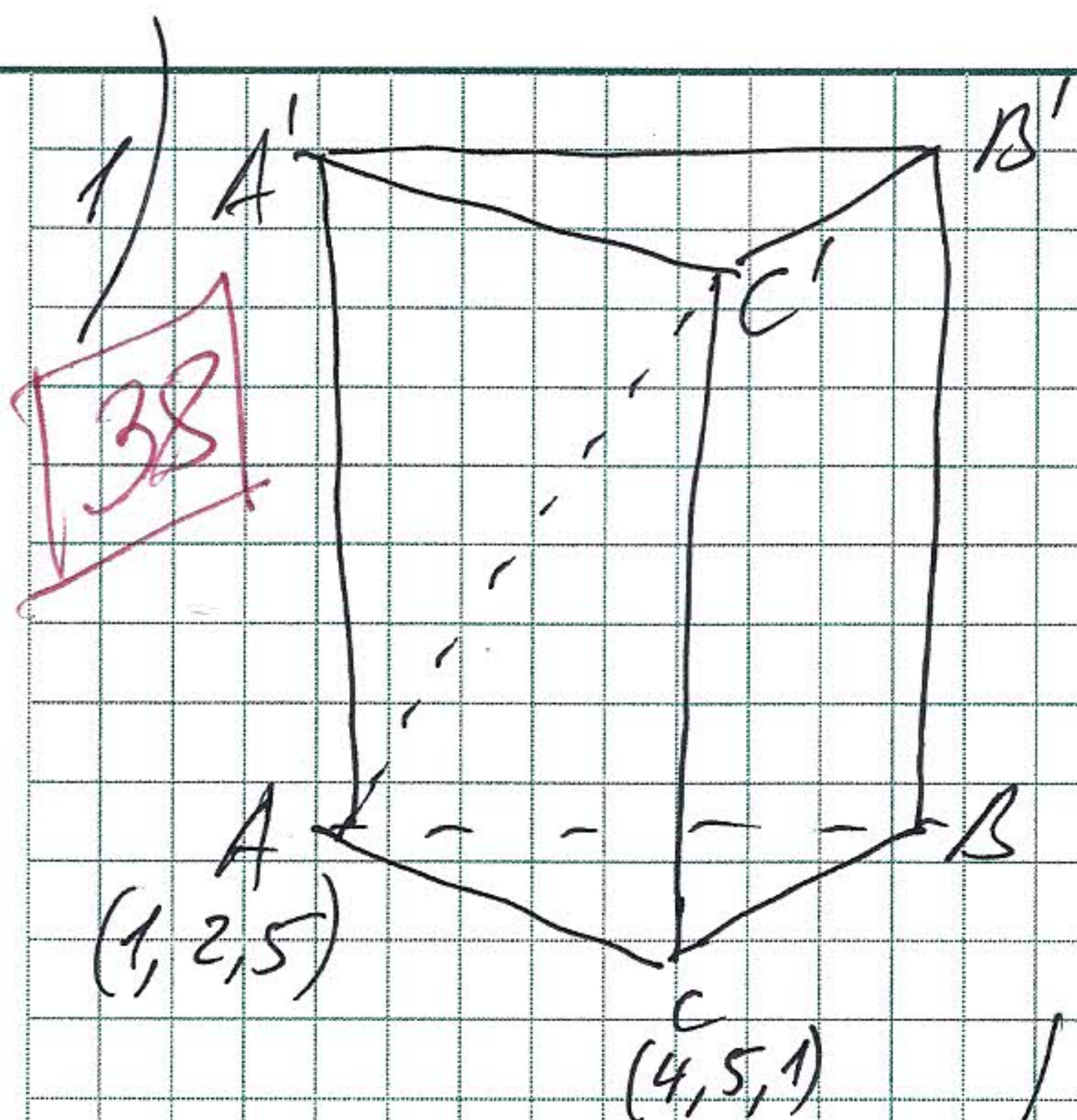
תאריך:

מקצוע:

הכיתה:

הנבחן:

שם משפחה ופרטי



מיון:
מסלול $ABC A'B'C'$
 ΔABC ישרי $AC \perp BC$
 $\angle ACB = 90^\circ$

$A(1,2,5), C(4,5,1)$

משוואת ABC : $x = (1,2,5) + t(3,3,-4) + s(2,-6,-3)$

(1) מסלול ABC ישרי $AC \perp BC$
והצגה כמסלול BC ישרי BC

$$\begin{cases} (a,b,c)(3,3,-4) = 0 \\ (a,b,c)(2,-6,-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 3b - 4c = 0 \\ 2a - 6b - 3c = 0 \end{cases} \quad \cdot 2 \quad \begin{cases} 3a + 3b - 4c = 0 \\ 2a - 6b - 3c = 0 \\ 6a + 6b - 8c = 0 \end{cases}$$

$$33 + 3b - 32 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \quad a = 11 \quad c = 8 \quad 8a - 11c = 0$$

$$11x - \frac{1}{3}y + 8z + d = 0 \quad b = -\frac{1}{3} \quad c = 8$$

$$(1,2,5) \Rightarrow 11 - \frac{2}{3} + 40 + d = 0 \Rightarrow d = -\frac{151}{3} \Rightarrow ABC: 33x - y + 24z - 151 = 0$$

$$\vec{AC} = (3,3,-4) \quad \vec{BC} = (3t+2s-3, 3t-6s-3, 4-4t-3s)$$

$$B(1+3t+2s, 2+3t-6s, 5-4t-3s) \quad \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$

$$(3t+2s-3) \cdot 3 + (3t-6s-3) \cdot 3 + (4-4t-3s) \cdot (-4) = 0$$

$$9t + 6s - 9 + 9t - 18s - 9 = 16 + 16t + 12s = 0$$

$$34t = 34 \Rightarrow t = 1 \quad s = 1$$

$$BC: x = (4,5,1) + r(2,-6,-3) \quad \vec{BC} = (2,-6,-3)$$

8) $B(5-3, 14-3, 0+4) = B(2, 11, 4)$

$$x = (5, 14, 0) + t(3, 3, -4) \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2r = 5 + 3t \Rightarrow 2r - 3t = 1 \\ 5 - 6r = 14 + 3t \Rightarrow -6r - 3t = 9 \\ 1 - 3r = 0 - 4t \Rightarrow -3r + 4t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2r - 3t = 1 \\ -6r - 3t = 9 \\ -3r + 4t = -1 \end{cases}$$

$$8r = -8 \Rightarrow r = -1 \Rightarrow t = -1$$

$$3 - 4 = -1 \Rightarrow -1 = -1$$

ציון:

שם המורה/הבודק:

הנבחר:

שם משפחה ופרטי

הכיתה:

מקצוע:

תאריך:

: 7END

1) $BCC'B' \perp \delta AC' \Rightarrow \angle' / 5$

✓ $III' \sim AC'C$ יח"ש

121 $BEC'B' \perp AC$ e

$AC' \cong SC' \Rightarrow 101) CC'$

✓ $BCC'B' \rightarrow e'_{\perp} = \delta f$

$$C(4, 5, 1)$$

$$33x - y + 24z + d = 0$$

$$\frac{|132 - 5 + 24 + d|}{\sqrt{1089 + 1 + 576}} = \frac{\sqrt{34}}{7}$$

$$\Rightarrow |151+d| = \frac{238}{7} = 34$$

$$151 + d = 34 \quad (1k) \quad 151 + d = -34$$

$$d_1 = -117 \quad \checkmark \quad d_2 = -185$$

$A'B'C'$ זענען געווען: 1, 2, 3

$$33x - y + 24z - 117 = 0$$

2. 2/1/25

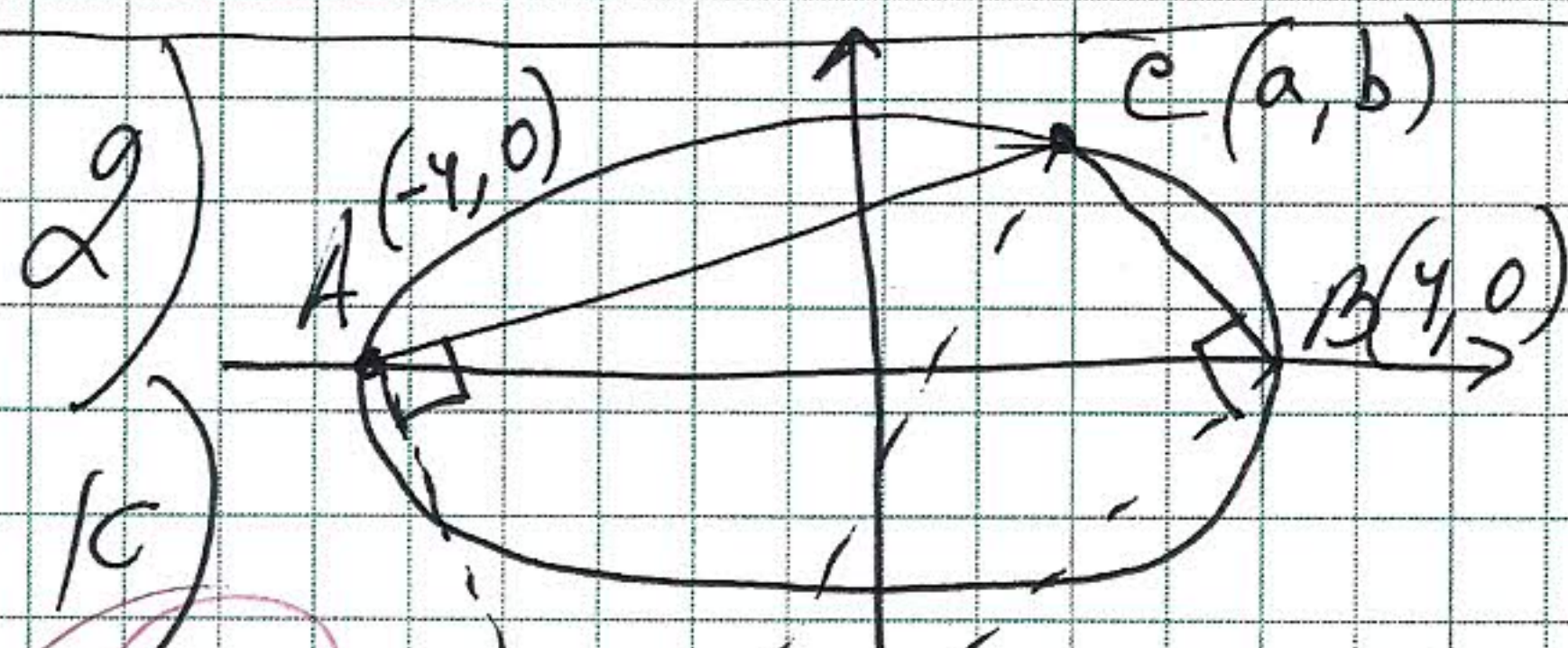
$$33x - y + 24z - 185 = 0$$

7) $|\vec{BC}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$ ✓

$$(\vec{BC} = (2, 6, 3))$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot |\vec{CC'}| \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{34} \cdot 7}{2} \cdot \frac{\sqrt{34}}{7} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$



$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} = 1$$

$$m_{BC} \cdot m_{BD} = -1 \Rightarrow \frac{b}{a-4} \cdot \frac{y}{x-4} = -1$$

$$by = (4-a)(x-4)$$

$$m_{AC} \cdot m_{AD} = -1 \Rightarrow \frac{b}{a+4} \cdot \frac{y}{x+4} = -1$$

$$by = (-a-y)(x+y)$$

$$\delta a = -\delta \bar{x}$$

$$a = -x \quad \text{by } y = x^2 + 16 \Rightarrow b = \frac{x^2 - 16}{5}$$

$$(15/28) \quad \overline{a^2 + 4b^2 = 16} \Rightarrow \overline{x^2 + \frac{4(x^2-16)^2}{y^2} = 16} \Rightarrow \overline{x^2 y^2 + 4(x^2-16)^2 = 16y^2}$$

$$(x^2 - 16)y^2 + 4(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow \cancel{(x^2 - 16)} \Rightarrow y^2 + 4x^2 - 64 = 0$$

$$(B \vdash A \wedge \exists x \forall y (x \neq \pm y)) \Rightarrow \exists x (\delta_{10} \wedge \delta_{27}) \wedge \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$

שם: _____
 ציון: _____

דף מבחן

שם המורה/הבודק: _____

הנבחן: _____ הכיתה: _____ מקצוע: _____ תאריך: _____

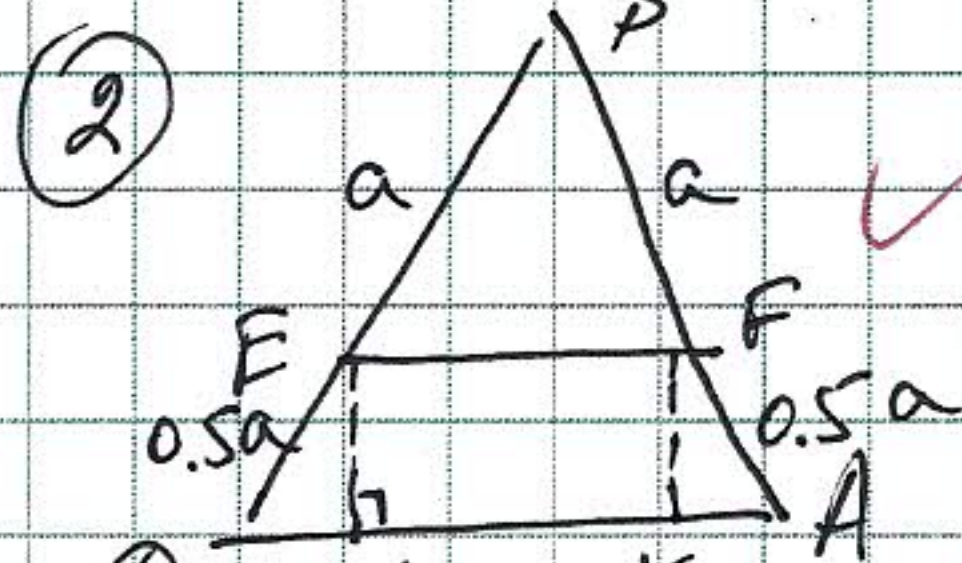
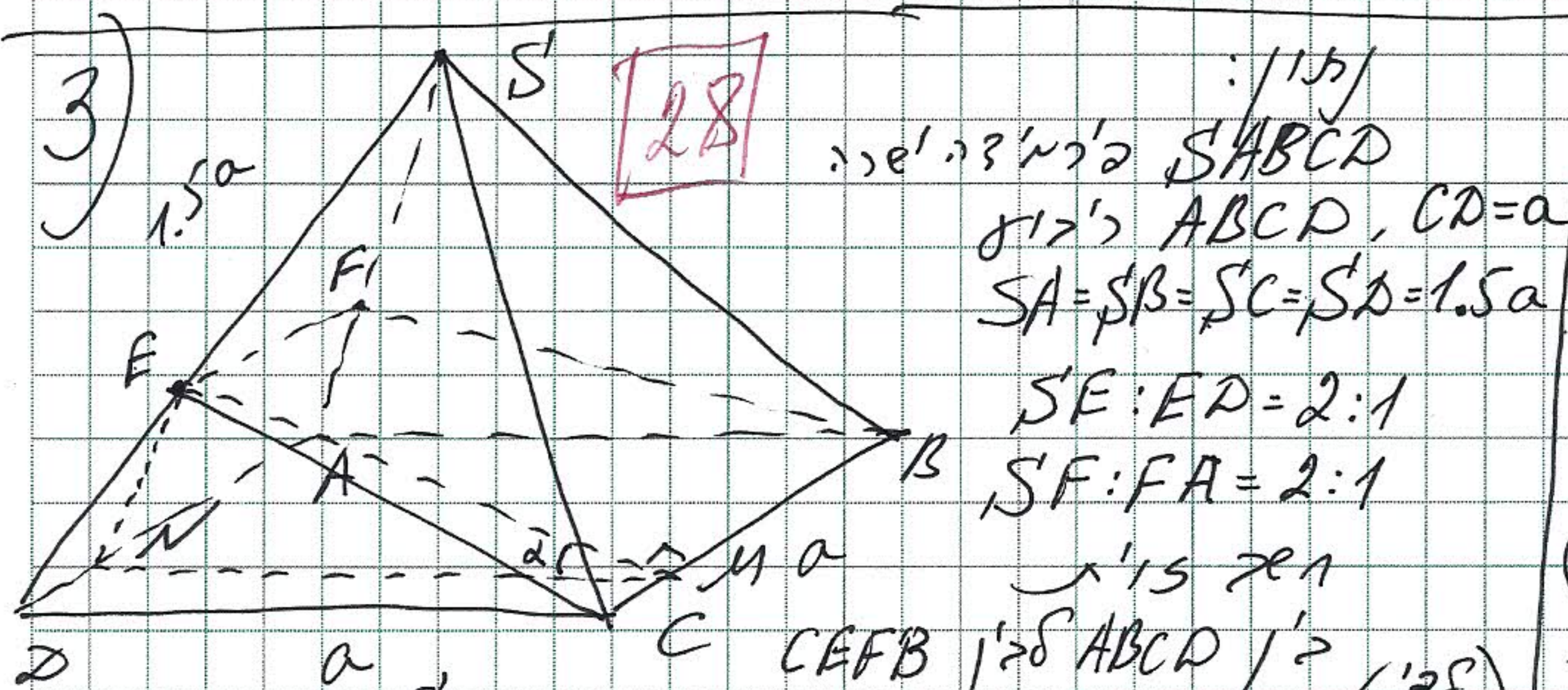
שם משפחה ופרטי

הערות:

2) $z^3 = \bar{z}$ (40%)

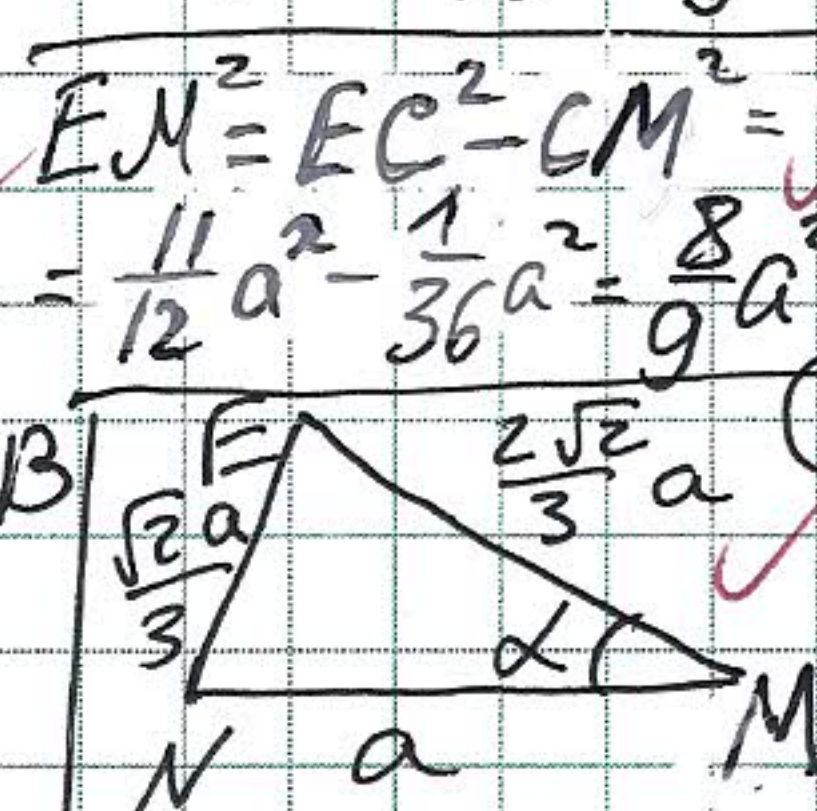
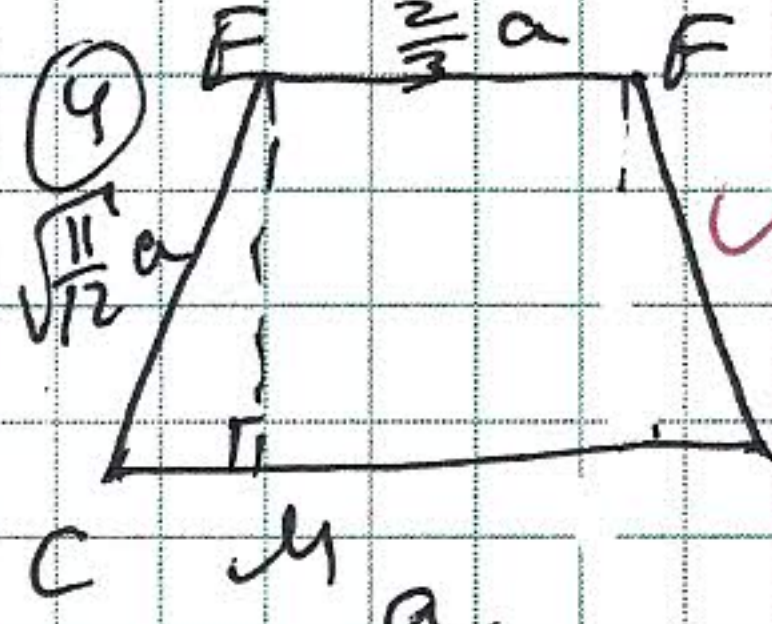
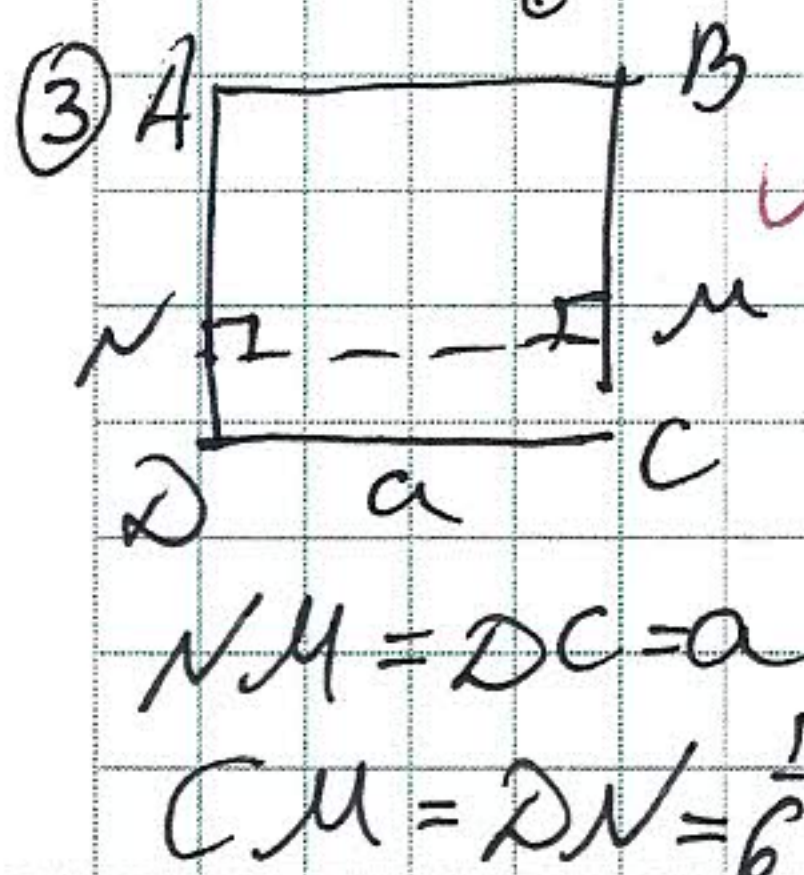
$z = r \operatorname{cis} \alpha \Rightarrow r^3 \operatorname{cis} 3\alpha = r \operatorname{cis}(-\alpha) / : r \operatorname{cis}(\alpha)$
 $\bar{z} = r \operatorname{cis}(-\alpha)$
 $r^2 \operatorname{cis} 4\alpha = 1 = \operatorname{cis}(360^\circ k)$
 $\Rightarrow r = 1, \alpha = 90^\circ k$
 $a = (\operatorname{cis} 90^\circ)^4 = \operatorname{cis}(360^\circ) = 1$
 $1 < \delta < 8$

$z_1 = \operatorname{cis} 0^\circ = 1$
 $z_2 = \operatorname{cis} 90^\circ = i$
 $z_3 = \operatorname{cis} 180^\circ = -1$
 $z_4 = \operatorname{cis} 270^\circ = -i$

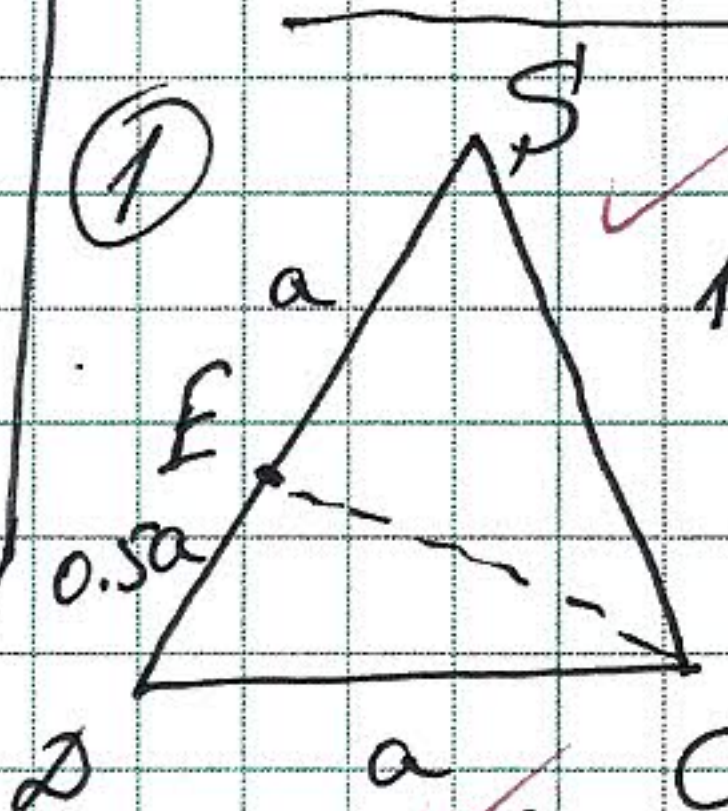


$\frac{EF}{AD} = \frac{SE}{SD} = \frac{2}{3}$
 $EF = \frac{2}{3}a$

AD \perp EN (EN is the height of the trapezoid ENMA)
 $DN = KA = \frac{a - \frac{2}{3}a}{2} = \frac{1}{6}a$
 $EN^2 = ED^2 - DN^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{36}a^2 = \frac{8}{36}a^2 = \frac{2}{9}a^2$



$EM^2 = EC^2 - CM^2 = \frac{11}{12}a^2 - \frac{1}{36}a^2 = \frac{8}{9}a^2$
 $EM = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$



$\frac{SE}{DE} = 2$
 $SE = a, DE = 0.5a$
 $\cos \angle S = \frac{(1.5a)^2 + (1.5a)^2 - a^2}{2 \cdot 1.5a \cdot 1.5a} = \frac{3.5}{4.5}$
 $\cos \angle S = \frac{7}{9} (\angle S = 38.94^\circ)$
 $EC^2 = a^2 + (1.5a)^2 - 2 \cdot a \cdot 1.5a \cdot \cos \angle S$
 $EC^2 = \frac{11}{12}a^2 (=0.917a^2)$
 $EC = \sqrt{\frac{11}{12}}a (=0.957a)$
 $\cos \alpha = \frac{\frac{8}{9}a^2 + a^2 - \frac{9}{9}a^2}{2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}a \cdot a} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = 0.884$
 $\alpha = 27.886^\circ$

ציון:

שם המורה/הבודק:

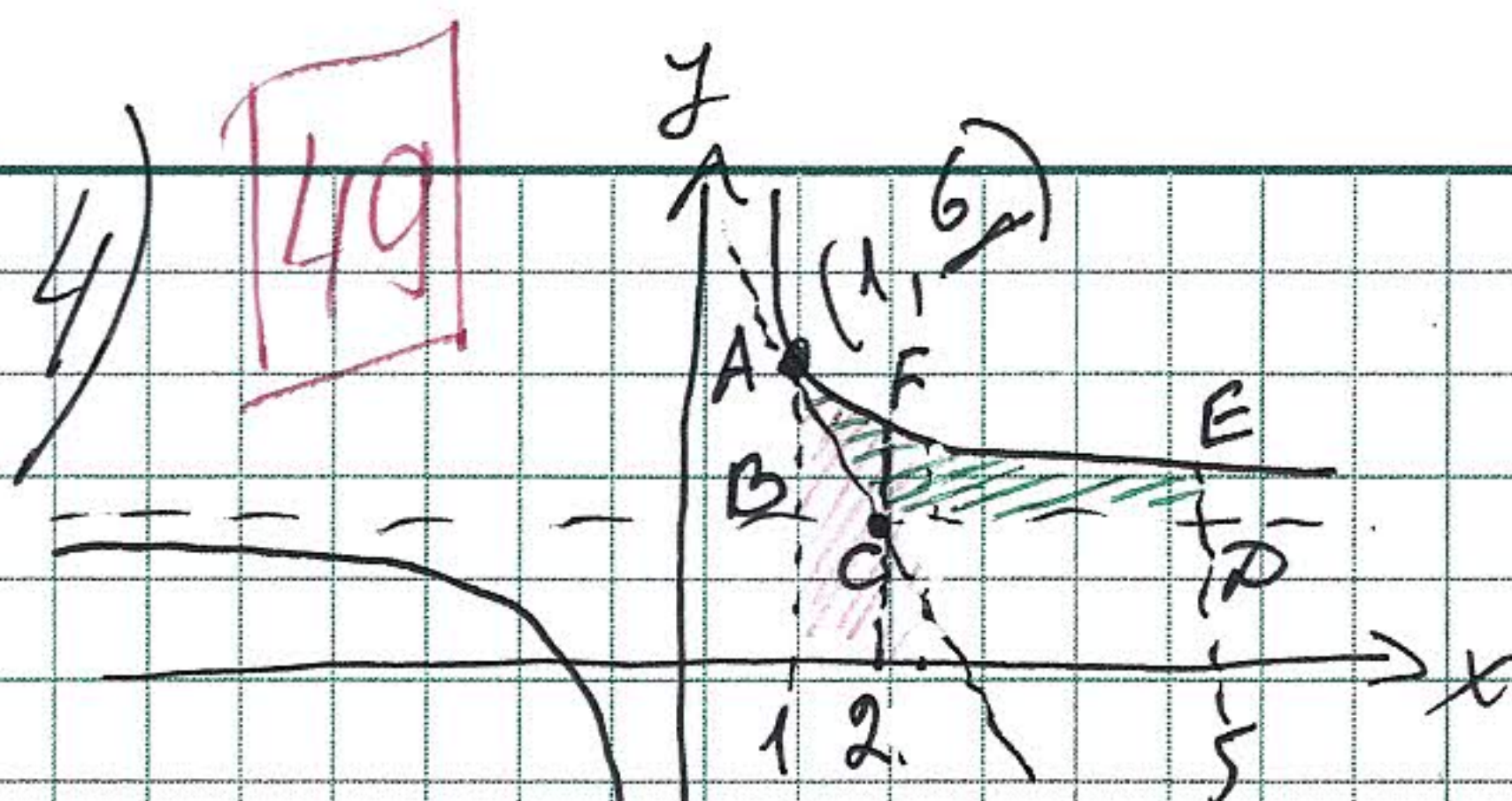
הנבחר:

הכיתה:

מקצוע:

תאריך:

שם משפחה ופרטי



$$f(x) = \frac{mx + n}{x}$$

$$\frac{600}{x \neq 0}$$

(1) אם $m > 0$ אז $y = m$ (אם $m < 0$ אז $y = m$)

$$x = -\frac{n}{m} \quad \checkmark \quad x = -\frac{n}{m} \quad \text{פירוש } x = -\frac{n}{m}$$

ולכן $\frac{n}{m} < 0$ - מכיוון $m > 0$ ו- $n > 0$.

$y = -4x + 10$ כל $x=1$ נקודה נמצאת על $f'(1) = -4$ (ע)
 $(1, 6)$ נקודה נמצאת על $f(1) = 6 \Leftrightarrow y(1) = 6$

$$f(r) = m + n = 6 \quad f'(x) = \frac{mx - (mx + n) \cdot 1}{x^2} = -\frac{n}{x^2}$$

$$f'(x) = -n = -4 \Rightarrow \underline{n=4}, \underline{m=2} \quad f(x) = \frac{2x+4}{x}$$

$$3) \quad S = 2 - \ln 16 \quad ||| \quad S = \int_1^2 \frac{2x+4}{x} dx = \int_1^2 \left(2 + \frac{4}{x}\right) dx = \left[2x + 4 \ln|x|\right]_1^2 = 4 + 4 \ln 2 - 2 - 4 \ln 1 = 2 + \ln 2^4 = \underline{2 + \ln 16}$$

ii) $S = ?$ $y = 2$ $\Rightarrow B(1, 2)$ $C: -4x + 10 = 2$
 $C(2, 2)$ $x = 2$

$$S_{ACDE} = S_{ABDE} - S_{ABC}$$

$$S_{ACDE} = S_{ABDE} - S_{ABC}$$

$$S_{ABDE} = \int_1^5 \left(2 + \frac{4}{x} - 2 \right) dx = \left[\ln|x| \right]_1^5 = \ln 5$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \quad S_{ACDE} = (n) - 2$$

1) $g(x) = 16 \ln x + 4x - \frac{16}{x}$ ($g'(x) = f(x)$: 10/10)

$g'(x) = \frac{16}{x} + 4 + \frac{16}{x^2} = \frac{16x + 4x^2 + 16}{x^2} = \frac{(2x+4)^2}{x^2} = f(x)$

Sc^m

שם: _____
 ציון: _____

דף מבחן

שם המורה/הבודק: _____
 הנהגון: _____ הכיתה: _____ מקצוע: _____ תאריך: _____
 שם משפחה ופרטי

הערה
 1) 2)

$$V_{AEDC} = V_{AFC} + V_{FEDC}$$

$$V_{AFC} = \pi \int_1^2 \left(\left(2 + \frac{4}{x} \right)^2 - (-4x + 10)^2 \right) dx = \pi \int_1^2 \left(4 + \frac{16}{x} + \frac{16}{x^2} - 16x^2 + 80x - 100 \right) dx$$

$$= \pi \left[16 \ln|x| - \frac{16}{x} - \frac{16x^3}{3} + \frac{80x^2}{2} - 96x \right]_1^2 = \left(16 \ln 2 - \frac{248}{3} \right) - \left(-\frac{232}{3} \right) \pi$$

$$V_{AFC} = \pi \left(16 \ln 2 - \frac{16}{3} \right) = 18.086 = 5.757\pi$$

$$V_{FEDC} = \pi \int_2^5 \left(\left(2 + \frac{4}{x} \right)^2 - 2^2 \right) dx = \pi \int_2^5 \left(4 + \frac{16}{x} + \frac{16}{x^2} - 4 \right) dx =$$

$$= \pi \left[16 \ln|x| - \frac{16}{x} \right]_2^5 = \pi \left(16 \ln 5 - \frac{16}{5} \right) - \left(16 \ln 2 - 8 \right) = \pi \left(16 \ln 2.5 + \frac{24}{5} \right)$$

$$V_{AEDC} = \pi \left(16 \ln 2 - \frac{16}{3} + 16 \ln 2.5 + \frac{24}{5} \right) = \pi \left(16 \ln 5 - \frac{8}{15} \right) = 25.2176\pi$$

$$5) y = \frac{8e^{4x}}{1-e^{4x}}$$

$$e^{4x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$y' = \frac{8 \cdot 4 \cdot e^{4x} (1-e^{4x}) - 8e^{4x} (-4)e^{4x}}{(1-e^{4x})^2} =$$

$$= \frac{32e^{4x}(1-e^{4x} + e^{4x})}{(1-e^{4x})^2} = \frac{32e^{4x}}{(1-e^{4x})^2} > 0$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8e^{4x}}{1-e^{4x}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8e^{4x}}{1-e^{4x}} = -8 \Rightarrow y = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8e^{4x}}{1-e^{4x}} = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\textcircled{3} \int \frac{8e^{4x}}{1-e^{4x}} dx = \int \frac{8e^{4x}}{z} \cdot \frac{dz}{-4e^{4x}} =$$

$$= -2 \int \frac{1}{z} dz = -2 [\ln z] = -2 [\ln(1-e^{4x})]$$

$$= -2 (\ln(1-e^{-4}) - \ln(1-e^{-8}))$$

$$S = 2 \ln(e^4 + 1) - 8 = 0.0363$$

$$\textcircled{9} S = 0.0363$$