

מבחן במתמטיקה 5 יח"ל - 806 - כיתה יא' (דוד)

במבחן ישנם שלושה פרקים א', ב' ו-ג' אליהם לענות רק על שתי שאלות מכל פרק  
בסי"כ 6 שאלות מתוך 9 לכל שאלה  $16\frac{2}{3}$  נקודות. חשוב לנמק כל שלבי הפתרון.  
זמן הבחינה – שלוש וחצי (3.5) שעות.

פרק א': אלגברה (יש לפתור רק שתי שאלות)

1.

מכלי שהכיל תמיסת כוהל בריכוז של 80% הוציאו 5 ליטרים של תמיסה והכניסו  
במקומם 5 ליטרים של תמיסת כוהל בריכוז של 60%. לאחר מכן הוציאו  
5 ליטרים מהתערובת שהתקבלה והוסיפו במקומה 5 ליטרים של תמיסת כוהל  
בריכוז של 35%. ריכוז הכוהל בתמיסה שהתקבלה לבסוף היה 65%. מצא את  
כמות התמיסה שהיתה בכלי.

2.

(א) נתון הטור:  $2 + 5 \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3^3 + \dots$

(א) מצא, על-פי החוקיות המסתמנת, נוסחה שתייצג את האיבר ה-n-י בטור הנ"ל.

(ב) הוכח באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי הסכום של n האיברים הראשונים בטור

הנ"ל הוא:  $\frac{1}{4}[(6n-5) \cdot 3^n + 5]$

(ג) הסדרה  $a_n$  מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל נסיגה:  $a_1 = 1$ ;  $a_{n+1} = \frac{5a_n - 8}{2a_n - 3}$

מגדירים סדרה  $b_n$ , לכל n טבעי:  $b_n = \frac{1}{a_n - 2}$

הוכח כי הסדרה  $b_n$  היא סדרה חשבונית.

--- אין קשר בין הסעיפים א' ו-ב'.

3.

בכד אחד נמצאים n כדורים כתומים ו-n כדורים חומים. בכד שני נמצאים n כדורים כתומים ו-  
2n כדורים חומים. זורקים קובייה מאוזנת; אם מתקבל מספר המתחלק ב-3 מוציאים בזה אחר זה,  
ללא החזרה, שני כדורים מן הכד הראשון, ואם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3 מוציאים בזה אחר  
זה, ללא החזרה, שני כדורים מן הכד השני. ההסתברות שהוצאו באופן זה שני כדורים כתומים מן  
הכד הראשון גדולה פי  $\frac{7}{6}$  מן ההסתברות שהוצאו שני כדורים כתומים מן הכד השני.

א. מצא את n.

ב. חשב את ההסתברות להוציא באופן זה שני כדורים כתומים.

ג. מחזירים את כל הכדורים למקומם ובאותה דרך שוב בוחרים כד ומוציאים בזה אחר זה  
ללא חזרה, שלושה כדורים. מהי ההסתברות שלא יהיה ביניהם אף כדור כתום.

המשך בעמוד השני



פרק ב' : גאומטריה וטריגונומטריה במישור (יש לפתור רק 2 תרגילים)

4.

משולש ABC חסום במעגל

בנקודה C מעבירים משיק למעגל

וחותך את המשיך הצלע AB בנקודה D.

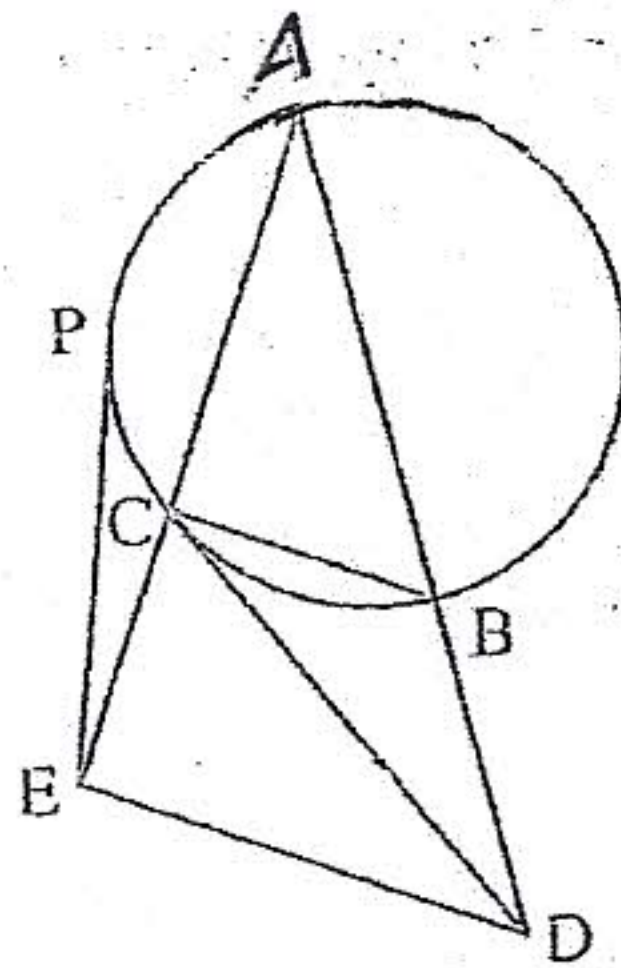
דרך נקודה D מעבירים ישר  $\ell$  המקביל לצלע BC.

ומשיך הצלע AC חותך את הישר  $\ell$  בנקודה E.

(א) הוכח כי:  $AE \cdot CE = DE^2$ .

(ב) EP משיק למעגל בנקודה P.

הוכח כי:  $DE = PE$ .



5.

קטע AC הוא קוטר במעגל. נקודה D נמצאת על מעגל זה,

ונקודה B נמצאת על הקוטר AC (ראה ציור).

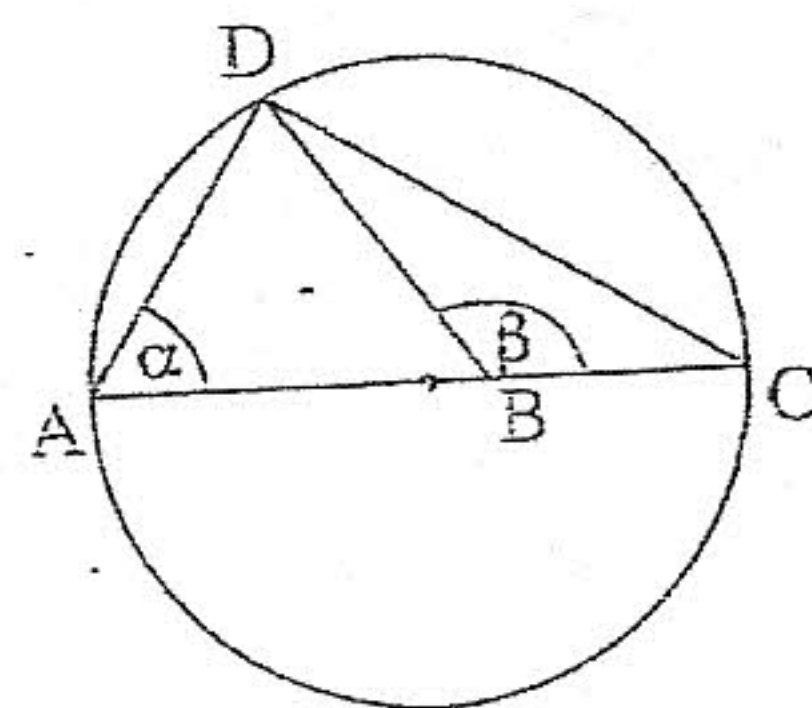
נסמן:  $\angle DBC = \beta$ ,  $\angle DAB = \alpha$ .

א. הבע באמצעות  $\alpha$  ו- $\beta$  את היחס בין

שטח המשולש ADB  $(S_{\triangle ADB})$

לבין שטח המשולש ADC  $(S_{\triangle ADC})$ .

ב. מצא את  $\beta$ , אם  $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADC}$  ו- $\alpha = 60^\circ$ .



6.

במשולש ABC חסום מעגל שרדיוסו r. שתיים מזוויות המשולש הן:  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .

א. הבע בעזרת r,  $\alpha$  ו- $\beta$  את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

ב. הבע בעזרת r את אורך התיכון לצלע BC במשולש ABC בו נתון כי:  $\alpha = \beta = 40^\circ$ .

פרק ג' : חדו"א (יש לפתור רק 2 תרגילים)

7.

נתונה הפונקציה:  $y = \frac{x^3 + bx - 4b}{x - 4}$ . שיעור ה-y של נקודת הפיתול של הפונקציה הוא 2.

מצא:

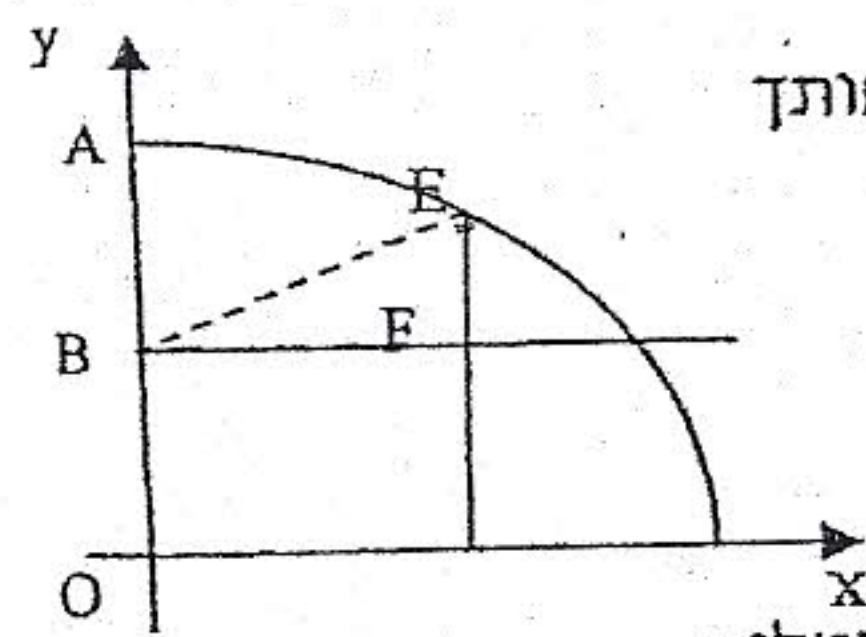
א. את b.

ב. את תחום ההגדרה של הפונקציה. ג. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ד. נקודות קיצון של הפונקציה. ה. נקודת הפיתול של הפונקציה. ו. תחומי עליה וירידה. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

המשך בעמוד השלישי



8.



נתונה הפונקציה  $f(x) = \sqrt{9-2x}$  ברביע הראשון. גרף הפונקציה חותך את ציר  $y$  בנקודה  $A$ . נקודה  $B$  היא אמצע  $AO$  (ראשית הצירים). מנקודה  $B$  מעבירים ישר  $l$  מקביל לציר  $x$ . מנקודה  $E$  כלשהי על גרף הפונקציה מורידים אנך לציר  $x$ . האנך חותך את הישר  $l$  בנקודה  $F$ . מהם שיעורי נקודה  $F$  שעבורם שטח משולש  $BEF$  מקסימלי?

9.

נתונה הפונקציה:  $y = \frac{ax}{x - \sqrt{x}}$ ,  $a > 0$ .

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים. ג. מצא נקודות חיתוך עם הצירים. ד. מצא נקודות פיתול של הפונקציה. ה. מצא תחומי קעירות כלפי מעלה ותחומי קעירות כלפי מטה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. ז. עבור אלו ערכים של  $k$ , אין לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  אף נקודה משותפת?

**בהצלחה!**





התיכון המקיף עומר

דף מבחן

מבחן פתרון אי' (806)

3/03/11

שם המורה/הבודק:

כגן ע'

תאריך:

מקצוע:

הכיתה:

שם משפחה ופרטי

הנבחן:

כמות	כמות	חומר	הערות
x	0.8	0.8x	הערות
5	0.8	4	הערות
x-5	0.8	0.8x-4	הערות
5	0.6	3	הערות
x	0.8x-1	0.8x-1	הערות
5	0.8x-1	4x-5	הערות
x-5	0.8x-1	0.8x-5x+5	הערות
5	0.35	1.75	הערות
x	0.8x-3.25x+5	0.8x-3.25x+5	הערות

$$0.8x - 1 - \frac{4x-5}{x} = \frac{0.8x^2 - 5x + 5}{x}$$

$$\frac{0.8x^2 - 5x + 5}{x} + 1.75 = \frac{0.8x^2 - 3.25x + 5}{x}$$

$$\frac{0.8x^2 - 3.25x + 5}{x^2} = 0.65$$

$$0.15x^2 - 3.25x + 5 = 0$$

$$3x^2 - 65x + 100 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{65 \pm \sqrt{4225 - 1200}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{65 \pm 55}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 20 \\ x_2 = \frac{10}{6} < 5 \end{cases}$$

הערות: כמות החומר היא 20

2, 5, 8, 11, ...

$$a_n = 2 + 3(n-1) = 3n-1$$

3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^{n-1}

$$2 + 5 \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3^3 + \dots$$

$$a_n = (3n-1) \cdot 3^{n-1}$$

$$2 + 5 \cdot 3^1 + \dots + (3n-1) \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} [(6n-5) \cdot 3^n + 5]$$

n=1 הנקודה

$$2 = \frac{1}{4} [(6-5) \cdot 3 + 5] = 2$$

n=k+1 הנקודה

$$2 + 5 \cdot 3^1 + \dots + (3k-1) \cdot 3^{k-1} + (3k+2) \cdot 3^k = \frac{1}{4} [(6k+1) \cdot 3^{k+1} + 5]$$

n=k הנקודה

$$2 + 5 \cdot 3^1 + \dots + (3k-1) \cdot 3^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{4} [(6k-5) \cdot 3^k + 5]$$

$$\frac{1}{4} [(6k-5) \cdot 3^k + 5] + (3k+2) \cdot 3^k = \frac{1}{4} [(6k+1) \cdot 3^{k+1} + 5]$$

$$(6k-5) \cdot 3^k + 5 + 4 \cdot 3^k (3k+2) = 3 \cdot 3^k (6k+1) + 5$$

$$3^k (6k-5 + 12k+8) = 3^k (18k+3)$$

$$3^k (18k+3) = 3^k (18k+3)$$

הערות: הנקודה n=1 היא הנקודה הראשונה



**שם משפחה ופרטי**

$$p\left(\frac{I}{II}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{16}{91}$$



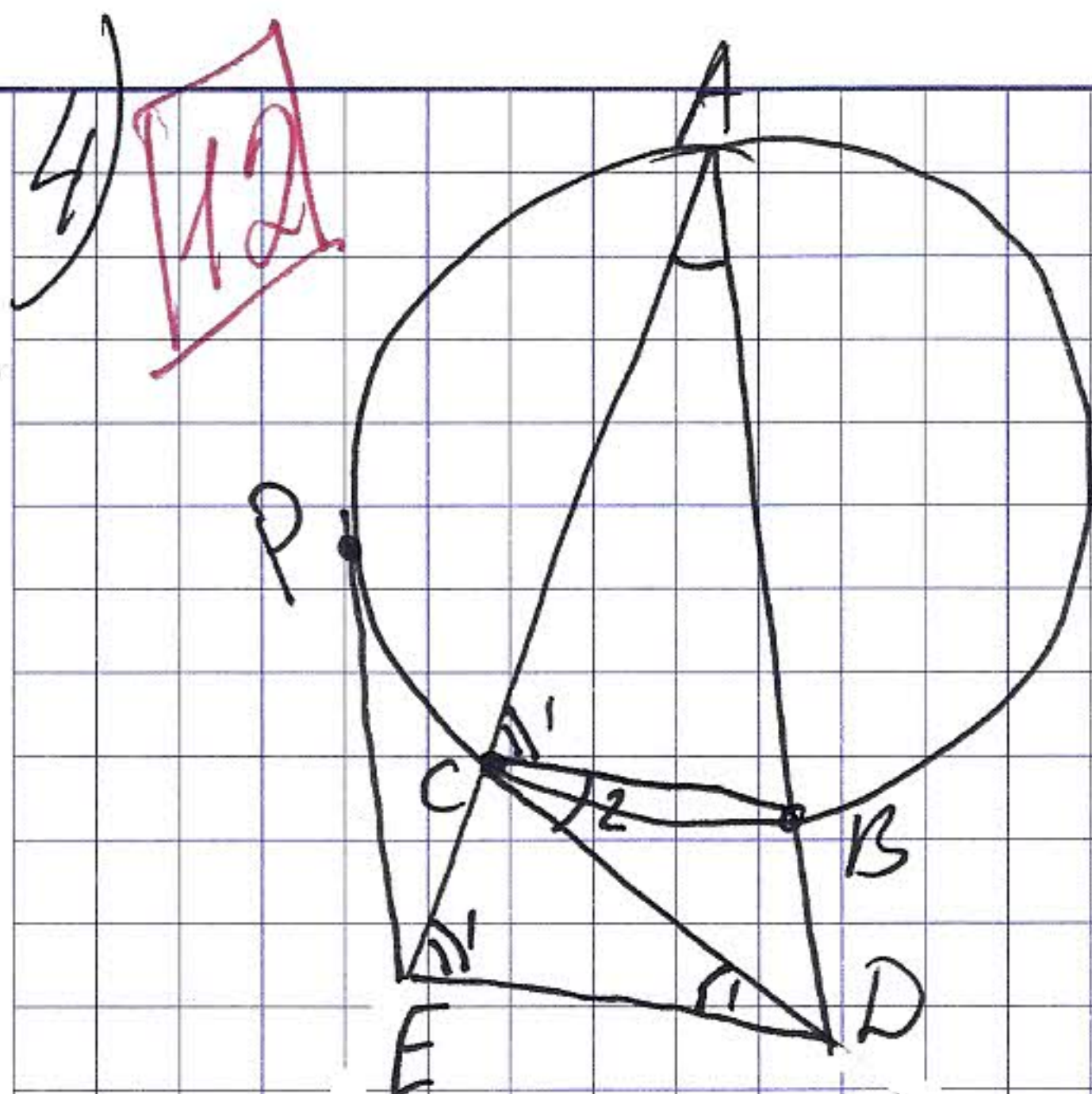
דף מבחן

שם המורה/הבודק: \_\_\_\_\_

הנבחן: \_\_\_\_\_ הכיתה: \_\_\_\_\_ מקצוע: \_\_\_\_\_ תאריך: \_\_\_\_\_

שם משפחה ופרטי

שם משפחה ופרטי



$\triangle ABC \cong \triangle DCB$   
 AB  $\cong$  DC  
 AC  $\cong$  DB

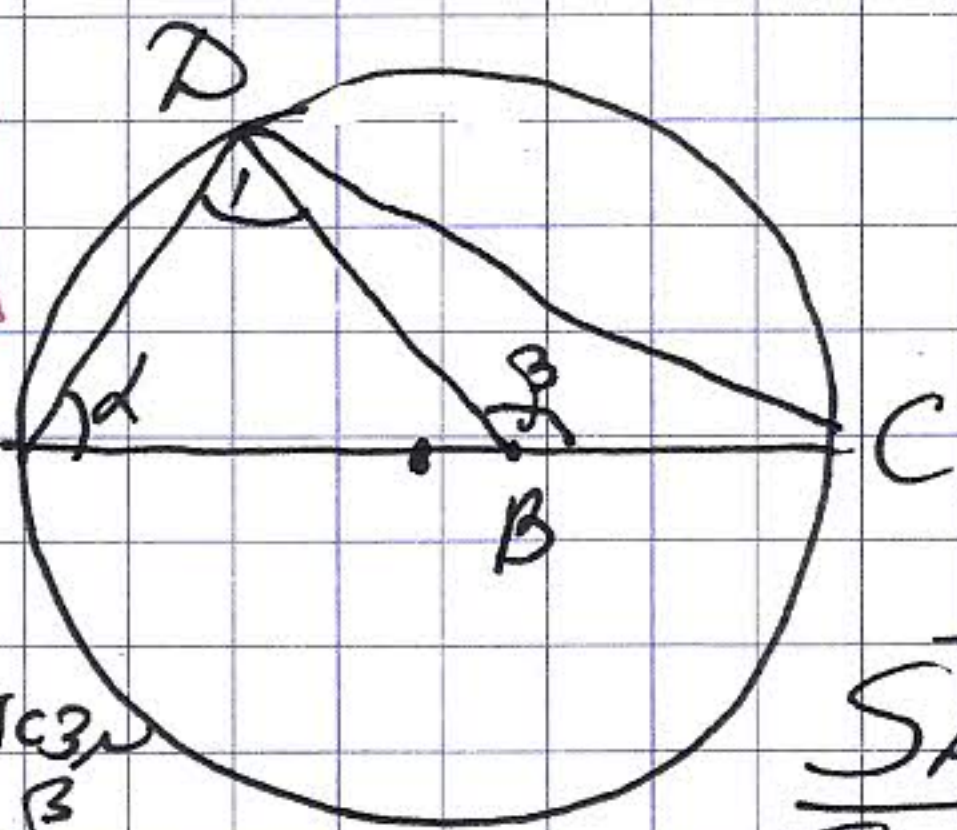
$$AE \cdot CE = DE^2$$

$g' \sim EP$   $\therefore \text{1/1/1}$  (2)

$DE = PE$   $\therefore \text{1/1/1}$

ה'כח"ה! ע"פ שבת: מ'ק'ו'ת'ר ה'אצ"ק  
מאות ונצח - ר'ב'י'ג' ע'ש'ק'  
עוד ע'ש'ב'ט' ה'ח'ת'ר ב'ה'ל'ק' ✓  
ה'ה'ז' ✓

$$EP^2 = AE \cdot CE = DE^2 \Rightarrow \underline{EP = DE} \quad \checkmark \quad (q'w'j'1+3) \quad (4)$$


$$\begin{array}{r} \hline \rightarrow C, AC \\ \neq A = \alpha \\ \neq \angle B C = \beta \end{array}$$

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = f(\alpha, \beta) \quad (1c)$$

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \frac{4R^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin(\beta/2)}{2 \sin \beta \cdot 2R^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha \sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta}$$

$$\frac{\cos 60^\circ \sin(\beta - 60^\circ)}{\sin \beta} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\beta - 60^\circ) = \sin \beta$$

$$\beta - 60^\circ = 180^\circ - \beta$$
$$\beta = \underline{\underline{120^\circ}}$$

$$f(x'_{13}, x'_{15}) \otimes \Delta_1 = \beta - \alpha$$

$$S_{ADB} = \frac{AD^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(180^\circ - \beta)} \quad S_4 = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

$$S_{ADB} = \frac{4R^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin(\beta - \alpha)}{2 \sin \beta}$$







שם המורה/הבודק: \_\_\_\_\_

הנבחן: \_\_\_\_\_ הכיתה: \_\_\_\_\_ מקצוע: \_\_\_\_\_ תאריך: \_\_\_\_\_

שם משפחה ופרטי

הנבחן: \_\_\_\_\_ הכיתה: \_\_\_\_\_ מקצוע: \_\_\_\_\_ תאריך: \_\_\_\_\_

שם משפחה ופרטי

$$\begin{aligned} y(x_1) &= 2 \\ y''(x_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$y'' = \frac{(6x^2 - 24x)(x-4)^2 - (2x^3 - 12x^2) \cdot 2(x-4) \cdot 1}{(x-4)^4}$$

$$y'' = \frac{(x-4)(6x^3 - 24x^2 - 24x^2 + 96x - 4x^3 + 24x^2)}{(x-4)^4}$$

$$2x^3 - 24x^2 + 96x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \checkmark \quad x^2 - 12x + 48 \neq 0$$

Find 150

$(0, 2)$  ✓

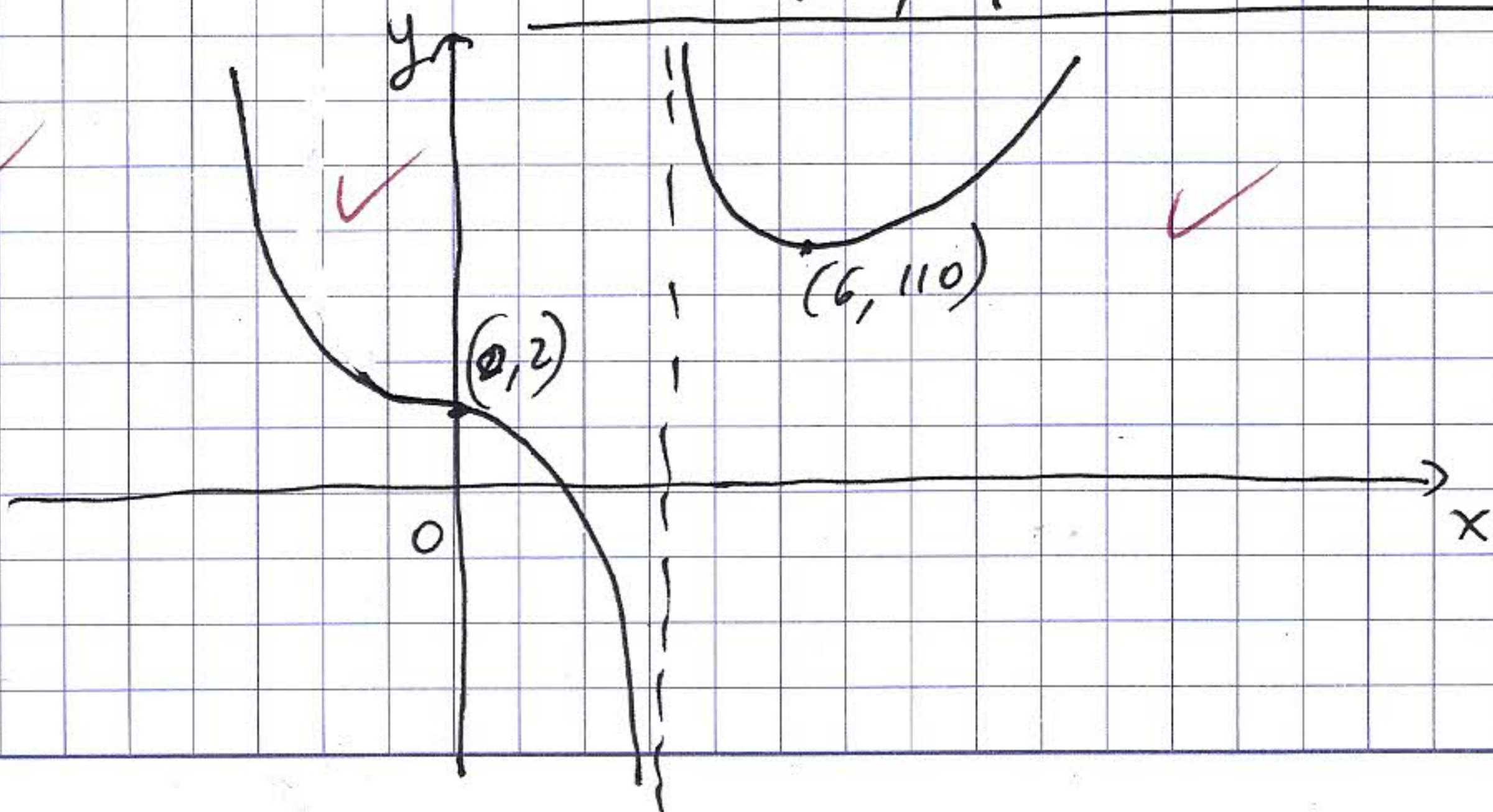
ii)  $(0, 2)$  'ର  $(0, 2)$  ର

$x > 6$  : 25 points (11)

$$4 < x < 6$$

$$\Gamma_{x < 0} \cup \text{points}$$

$$\frac{x > 4}{0 < x < 4} \quad \checkmark$$



18





התיכון המקיף עומר

## דף מבחן

ציון:

שם המורה/הבודק:

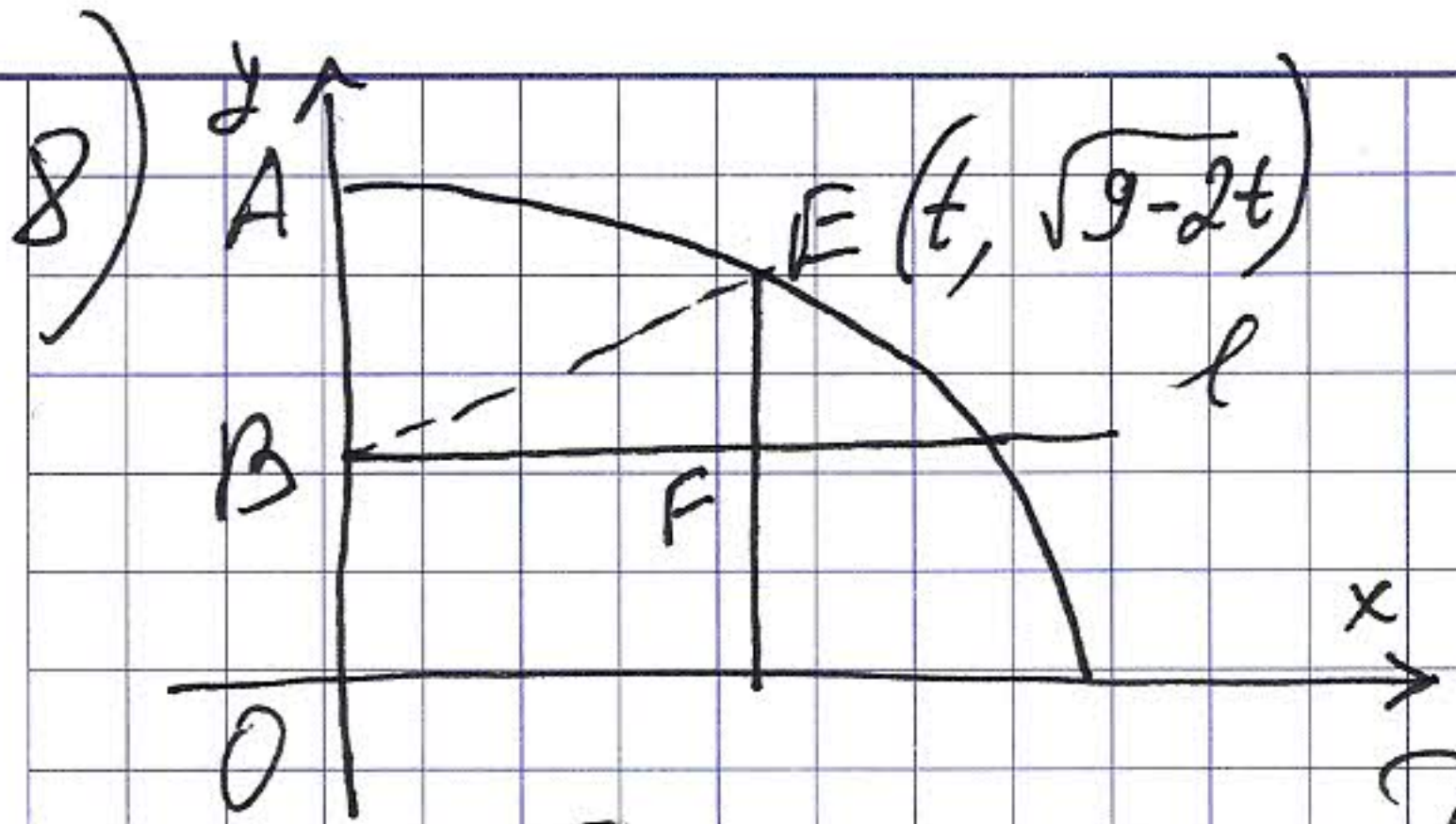
תאריך:

מקצוע:

הכיתה:

הנבחן:

שם משפחה ופרטי



$$f(x) = \sqrt{9-2x}$$

$$A: x=0, y=3$$

$$(0, 3)$$

$$B(0, 1.5) : AO \text{ מרכז}$$

$$BF = t = x_F = x_E$$

$$EF = y_E - 1.5$$

$$S_{BFE} = \max$$

$$S_{BFE} = \frac{BF \cdot EF}{2} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (\sqrt{9-2t} - 1.5) = f(t)$$

$$f'(t) = \left( \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{9-2t} - 1.5) + \frac{1}{2} t \cdot \frac{-2}{2\sqrt{9-2t}} \right) = 0 \quad / \cdot 2$$

$$9 - 2t - 1.5\sqrt{9-2t} - t = 0$$

$$9 - 3t = 1.5\sqrt{9-2t}$$

$$6 - 2t \geq 0$$

$$6 - 2t = \sqrt{9-2t} \Rightarrow$$

$$t \leq 3$$

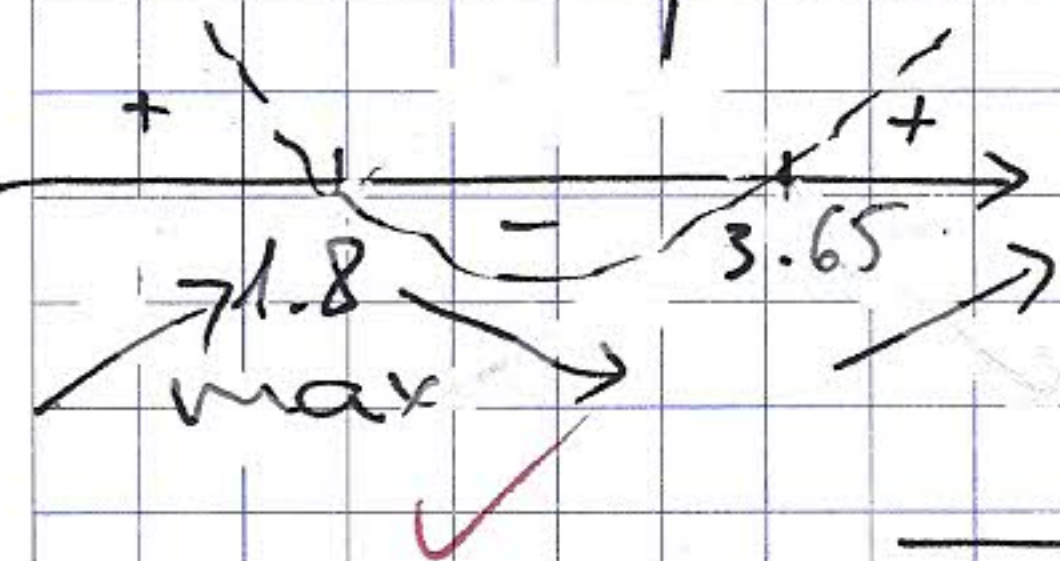
$$t_1 = \frac{22 + 7.2111}{8} = 3.65$$

$$t_2 = \frac{22 - 7.2111}{8} = 1.8486$$

$$36 - 24t + 4t^2 = 9 - 2t$$

$$4t^2 - 22t + 27 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 432}}{8}$$



$$S_{BFE} \text{ מקסימום ב- } F(1.85, 1.5)$$

18



